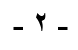
الإحصاء التطبيقي
في العلوم الاجتماعية

د. مهدى محمد القصاص

كلية الآداب – جامعة المنصورة

٢٠١٣ – ٢٠١٤



مقدمة

تستخدم كلمة الإحصاء لتشير إلي عملية جمع البيانات الكمية و الأساليب المستعملة في معالجة تلك البيانات ، و قد نعني بهذه الكلمة أيضا عملية استخلاص بعض الاستنتاجات من دراسة عينة صغيرة لصياغة تعميمات يمكن تطبيقها علي مجتمعات اكبر حجما .

فعلم الإحصاء يعطي للباحثين في مجال العلوم الاقتصادية و الاجتماعية والإدارية ، العديد من الطرق والأساليب اللازمة لضرورة القيام بالدراسات والبحوث الاقتصادية والاجتماعية و الإدارية والجغرافية علي أساس من القياس لحركة العديد من المتغيرات المحددة للظواهر موضوع الدراسة .

فبحوث الرأي العام علي سبيل المثال تقوم علي مقابلة و دراسة عينة صغيرة من أفراد المجتمع و لكن نتائجها تستخدم في الاستدلال علي اتجاهات الرأي العام في المجتمع ككل . و بذلك يمكن القول بان الإحصاء يشير إلي طرق تنظيم و تلخيص البيانات والي الأساليب التي تستخدم في تحليل و تفسير النتائج واستخلاصاتها يمكن تعميمها علي مجتمع الدراسة.

فالإحصاء هو علم يبحث فى طريق جمع الحقائق الخاصة بالظواهر العلمية الاجتماعية التى تتمثل فى حالات أو مشاهدات متعددة ، وفى كيفية تسجيل هذه الحقائق فى صورة قياسية رقمية، وتلخيصها بطريقة يسهل بها معرفة اتجاهات الظواهر وعلاقات بعضها ببعض ، ويبحث أيضاً فى دراسة هذه العلاقات والاتجاهات واستخدامها فى تفهم حقيقة الظواهر ومعرفة القوانين التى تسير تبعاً لها .

ومن هنا يتضح أن الإحصاء لا غنى عنه لأى باحث فى شتى المجالات المختلفة إذ اعتمد فى بحثه على الأسلوب العلمى. أي أن الإحصاء هو عصا الباحث التى تقوده إلى الطريق الصحيح، وهى الأداة التى تساعده على تفسير الظواهر التى يدرسها وتوضيح النتائج التى يحصل عليها ودلالات البيانات والأرقام التى يحصل عليها .

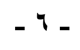
د. مهدى محمد القصاص

المنصورة فى سبتمبر ٢٠١٣

الفصل الأول

وظائف ومجالات علم الإحصاء

- وظائف علم الإحصاء
- مجالات علم الإحصاء
- أساليب جمع البيانات
- الفرض الإحصائي



وظائف علم الإحصاء

١ – وظيفة العد (الحصر) :

تعتبر وظيفة العد أو الحصر من أساسيات العمل الإحصائي بصرف النظر عن تطور هذه الوظيفة فى حد ذاتها ، فلقد بدأت انطلاقه العمل الإحصائي لعلم الإحصاء من هذه الوظيفة وعُرف من خلالها . وارتبط بها ارتباطا قوياً في الحقب القديمة فى التاريخ . ووصلت قوة هذا الارتباط إلى الدرجة التي عرف بها علم الإحصاء علي أساس أنه علم العد أو الحصر أو التعدادات لقيم الظواهر المختلفة المحيطة والمؤثرة فى النشاط اليومي للإنسان

غير أن التقدم التكنولوجي والذي فرض نفسه فجأة في جميع مجالات حياتنا اليومية كان له تأثيره فى تغير النظرة الكلاسيكية تجاه وظيفة العد والإحصاء فلم تعد عمليات التعدادات عبارة عن عملية حصر إجمالي للأشياء وقيم الظواهر بل أصبحت هذه الوظيفة تعطى لنا المزيد من البيانات والمعلومات التفصيلية فى كل المجالات بأسلوب يخدم أغراض التخطيط والتنمية .

٢ – وظيفة جمع البيانات :

ثاني وظائف العمل الإحصائي ، يقدمه لنا الأسلوب الإحصائي لجمع البيانات عن مختلف الظواهر المحيطة بنا ، هذه الوظيفة ، لها وجود يمتد إلى فترة طويلة سابقة ، منذ الوقت الذي كان يعرف فيه العلم على أساس أنه علم جمع البيانات والحقائق وتستمد هذه الوظيفة أهيمتها من خلال ضرورة توافر البيانات عن الظواهر والعوامل المحددة لها ، والمعلومات عن الظواهر موضع البحث حتى نتمكن من الدراسة والتحليل واستخلاص النتائج واتخاذ القرارات . فإذا ما أتبع أسلوب غير علمي وغير موضوعي في جمع البيانات وبطريقة غير دقيقة أدى ذلك إلى الحصول

على حقائق عن الأشياء غير سليمة ومتحيزة وكان ذلك مصدراً فى إفساد النتائج واتخاذ قرارات لها خطورتها وغير مأمونة العواقب .

والعكس صحيح ، إذا ما اتبع أسلوب علمي ، موضوعي غير متحيز في جمع البيانات أدى ذلك إلى الحصول على حقائق عن الظواهر بطريقة سليمة غير متحيزة وكان ذلك مصدراً أساسياً للوصول إلى نتائج دقيقة سليمة وإلى اتخاذ قرارات على درجة كبيرة من الكفاءة عند مستوى من الثقة مرتفع.

٣ – وظيفة التحليل البياني للمعلومات :

تعتبر هذه الوظيفة هي نقطة تحول أساسية فى التطور الوظيفي لعلم الإحصاء وبداية لهذا التطور . فبعد أن كانت العملية الإحصائية محصورة فى مجرد إحصاء للبيانات ، من خلال وظيفتي العد وجمع البيانات ، أصبحت العملية الإحصائية تمتد إلى أبعد من ذلك وأعمق فى وقتنا هذا .

وباستحداث أسلوب التحليل البياني أصبح سهلاً على الباحثين والدارسين تحديد أكبر عدد ممكن من خصائص الظواهر المحيطة وبطريقة علمية تهدف إلى إعطاء أشكال بيانية للظاهرة من خلال البيانات المتاحة عنها مما يسهل ويبسط تحديد الخصائص والعلاقات والاتجاهات العامة للظاهرة وتحديد انتماء الشكل إلى بعض المجموعات الأساسية ذات الخصائص المحددة .

٤ – وظيفة التحليل الكمي للبيانات :

تعتبر هذه الوظيفة إضافة هائلة إلى أسلوب العمل الإحصائي فى دراسة خصائص الظواهر بطريقة قياسية .

ونتيجة لاستخدام الأسلوب الكمي في تحليل المعلومات أصبحت النتائج على درجة عالية من الدقة تصلح أساسا سليماً مطمئناً لاتخاذ

القرارات. هذا الأسلوب الحديث فى إطار ما يعطيه لنا علم الإحصاء من أدوات تحليلية ضرورية وهامة فى مجال البحث العلمي ، مرن ومتطور لازدياد الحاجة إليه واعتماد أسلوب البحث العلمي المتطور على الاستعانة بأدواته التحليلية فى تنفيذ الدراسات العلمية على أساس قياسي غير متحيز.

٥ – وظيفة وضع الفروض :

وظيفة وضع الفروض تهدف أساساً إلى تبسيط المشكلة موضع الدراسة والتحليل ، وذلك من خلال وضع فروض محددة من منطلق ما يتصوره وما يشعر به الباحث تجاه ما ينوى دراسته ووضع النتائج بصدد حل المشكلة موضع البحث .

ويعتبر أسلوب عزل بعض المتغيرات أى افتراض عدم تأثيرها على الظاهرة موضع الدراسة أحد الأساليب المستخدمة فى تبسيط طرق معالجة المشاكل وتحديد الخصائص والتأكد من صحة بعض النظريات .

٦ – وظيفة الاختبارات الإحصائية :

هذه الوظيفة مكملة للوظيفة السابقة فاستخلاص النتائج واتخاذ القرارات لدراسات مبينة أساساً على وضع فروض محددة يجب ألا يتم إلا بعد اختبار صحة هذه الفروض .

وهنا نجد دوراً كبيراً للنظريات الإحصائية والتى خصصت لكيفية اختبار صحة الفروض فى ظل درجات عالية وأدنى درجات من الخطأ المسموح به .

والمعروف إحصائياً أن اختبار الفروض فى مجال الدراسات الميدانية يكون أصعب منه فى مجال الدراسات المعملية .

٧ – وظيفة التنبؤ الاستدلالي :

باستخدام طرق القياس والتحليل الإحصائي يمكن التوصل إلى اتجاه عام لما سيحدث في المستقبل للمتغيرات التي تتحكم في ظاهرة ما .

غير أن التنبؤ في مفهومه الاستدلالي أو التنبؤات الاستدلالية هي تلك التي تخص الماضي وليس المستقبل حيث يكون لها طابع الاستدلال أو الاكتشاف أو التأكد من وجود ظاهرة متكررة الحدوث دون ملاحظة سبب ذلك ، ويكون التنبؤ هنا لتأكيد وجود الظاهرة من خلال الملاحظة والقياس وتطبيق أسلوب العمل الإحصائي في تجميع البيانات وتسجيل الاتجاهات وتحديد الأسباب وتفسير التغيرات واستخلاص النتائج .

فى هذا النوع من التنبؤ يقوم الباحث بوضع فروض محددة محاولاً بعد ذلك جمع البيانات مع الإطلاع على التقارير والسجلات عن الظاهرة موضع التنبؤ واختبار صحة هذه الفروض.

مجالات الإحصاء

١ – الإحصاء الوصفي :

ويشمل الطرق الخاصة بتنظيم البيانات وتلخيصها وعرضها فى صورة جداول إحصائية أو رسوم بيانية ، أو أشكال هندسية أو تلخيصها ، أو حساب مقاييس النزعة المركزية ، ومقاييس التشتت وغيرها من المقاييس الأخرى.

وتجدر الإشارة إلى أن الوصف فى الإحصاء لا يعنى الوصف النظري أو التعبير بالكلمات عن ظاهرة ما ، ولكنه يعنى التعبير عن هذه الظاهرة بالأرقام .

وفى مجال الإعلام يهتم الباحث بدراسة المتغيرات المؤثرة فى الظاهرة التي يدرسها ، وهو فى سبيل ذلك يستخدم الإحصاء فى وصف العينة التي تمثل المجتمع محل الدراسة . وفى تحديد نسب كل متغير فى العينة ومتوسطاتها ودرجة تشتتها وما إلى ذلك من أساليب إحصائية تهتم بالوصف قبل التحليل ؛ فالباحث فى مجال الإعلام يهتم بتحديد قراء صحيفة معينة أو نسبة المستمعين إلى محطة راديو معينة إلى إجمالي عد

مفردات العينة التي تمثل مجتمع القراء أو المستمعين كما أنه قد يهتم بتحديد بتوسط أعمار القراء أو المستمعين أو متوسط الدخل الشهري لهم .. وهكذا .

٢ – الإحصاء الاستدلالي :

وهو عبارة عن مجموعة الطرق العلمية التي تعمل للاستدلال على المجتمع بناءً على البيانات الإحصائية التي جمعت من عينة من هذا المجتمع وفق طرق إحصائية محددة ، وتشمل على عدد من المفاهيم والنظريات وذلك عندما نحاول أن نعطى تعميمات من خلال دراسة أو تصميم عينة إذ لا نستطيع تحديد قيمة ما تتوصل إليه مقاييس الاختبار على نفس الدرجة المطبقة علي العينة المدروسة ، ويمكن لنا ذلك إذا وضعنا فى الاعتبار قيمتين إحداهما أعلى والأخرى أدنى للقيمة موضع التقدير بحيث يمكننا القول بأن هذه الكمية يمكن أن تعمم أو تكون حقيقية عند مستوى معين نختاره وعادة يكون مستوى ٩٥% أو ٩٩% وفى هذا يمكن استخدام معالجات إحصائية استدلالية مثل : الاحتمال ، والمنحنى المعتدل ، ومستويات الدلالة، وحدود الثقة ومعاملات الثقة .

والاستدلال الإحصائي يجب أن يكون هادفاً وفى إطار رؤية واضحة، وليس لمجرد التحليل واستخراج نتائج قد لا تكون مفيدة للموضوع الذي تتم دراسته فمنذ البداية ينبغي أن تفيد دراسة الموضوع ، كما أن تحليل هذه البيانات يجب أن يكون مرتبطاً بأهداف الدراسة ، ففي دراسة عن قراء إحدى الصحف فى أيام الأسبوع المختلفة وعلاقة عددهم بتغير أيام الأسبوع ينبغي منذ البداية جمع البيانات المتعلقة بعدد القراء فى كل يوم على حدة ، ثم يتم تحديد متوسط عددهم فى أيام السبت وفى أيام الأحد .. وهكذا ثم يتم بعد ذلك جدولة هذه البيانات والتحليل الإحصائي لها ودراسة العلاقة بين عدد القراء وأيام الأسبوع ، وفى هذه الحالة لا داعي لدراسة تأثير المستوى

الاقتصادي أو العلمي على الإقبال على قراءة الصحيفة ، لأن التحليل فى هذه الحالة لا يخدم أهداف الدراسة حتى وإن توفرت البيانات التي يمكن تحليلها .

وترتبط بوظيفة الاستدلال وظيفة اختبار الفروض الإحصائية وتعتمد هذه الوظيفة على وضع الفروض الإحصائية (بسيطة كان أو معقدة) تمهيداً لاختبارها ، والتأكد من صحتها أو عدم صحتها حتى يمكن استخلاص النتائج واتخاذ القرارات .

ولاشك أن البحوث الإعلامية التي تقوم على وضع فروض علمية بفرض اختبارها والوصول إلى نتائج هذه الاختبارات ، لابد أن يستخدم البحث فيها الاستدلال الإحصائي وأساليب اختبارات الفروض إحصائيا .

وإذا كان الفرض العلمي يعنى تعميماً مبدئياً تظل صلاحيته موضع اختبار ، فإن ذلك يعنى أن الفرض الإحصائي كفرض علمي يجب أن يكون صالحاً للاختبار ، ويتطلب ذلك أن يكون الفرض واضحاً ومحدداً أو قابلاً للدراسة الميدانية أو التحليلية بحيث يمكن تحليل البيانات التي يتم جمعها لاستخلاص النتائج وقبول الفرض أو رفضه . أما الجمل غير المحددة وغير القابلة للاختبار ، فهي لا تعتبر فرضاً علمياً ، فالقول بأن وسائل الإعلام المصرية تقوم بدورها على أعلى مستوى ، لا يعد ذلك فرضاً علمياً . أما القول بأن معالجة برامج التليفزيون لمشكلة الإرهاب قد خلقت اتجاهاً رافضاً له لدى قطاع الشباب ، يعد ذلك فرضاً علمياً يمكن اختباره ميدانياً وتحليل نتائج الاختبار وقبول الفرض أو رفضه بناء على نتائج التحليل .

المجتمع الإحصائي والعينة الإحصائية

عند دراسة ظاهرة من الظواهر ، ولتكن ظاهرة قراءة الصحف المصرية فإن جميع الأفراد الذين يقرئون الصحف يكونون ما يسمى

بالمجتمع الإحصائي ، وإذا أخذنا جزءاً من هؤلاء القراء فإن هذا الجزء يسمى بالعينة الإحصائية وقد يكون المجتمع الإحصائي محدداً مثل عدد قراء الصحف الحزبية فى مصر .

وعلى ذلك يكون المجتمع الإحصائي عبارة عن جميع المفردات موضع الدراسة والتي نريد معرفة خصائصها وتحديد الحقائق عنها سواء كانت هذه المفردات يعبر عنها بالأشخاص كالعمال والطلبة والأطفال أو غير ذلك ، والمجتمع الإحصائي بهذا التصور قد يكون محدداً أو قد يكون غير محدود .

والمفردة المستخدمة هي وحدة قياس المجتمع الإحصائي ، وذلك بدلاً من استخدام وحدات قياسية مختلفة للتعبير عن وحدات المجتمع .

أسلوب جمع البيانات :

عند الاعتماد على المصدر المباشر فى الحصول على بيانات البحث، فإن الدارس يمكنه ذلك من خلال استخدام أسلوب الحصر الشامل أو أسلوب العينات وهو فى استخدامه لأحد الأسلوبين يجب أن يقدر الجوانب السلبية والايجابية لكل منهما .

١ – أسلوب الحصر الشامل فى جمع البيانات :

ينطوي هذا الأسلوب فى الدراسة على أخذ كل مفردات المجتمع الإحصائي في الدراسة أخذاً كاملاً ودون تجاهل أى مفرده .

ويطلق على هذا الأسلوب أحياناً بأسلوب العد الكامل حيث إن معظم التعدادات تتم من خلاله . ومن أمثلة استخدام هذا الأسلوب قيام الباحث بأخذ كل المصابين بمرض أنفلونزا الطيور فى إحدى المحافظات أو على مستوى الجمهورية خلال فترة الدراسة ، أو قيام الباحث مثلاً بحصوله على البيانات من كل الطلبة المعاقين فى جامعة المنصورة لاستطلاع رأيهم فى مدى رعاية الجامعة لهم على مختلف المستويات .

غير أن هذا الأسلوب كثير المشاكل عند تطبيقه فهو لا يتناسب مع الدراسات التي يلعب عنصر الوقت فيها دوراً حاسماً لضرورة استخلاص النتائج قبل فترة محددة ، كما أنه كلما كان حجم المجتمع كبيراً كلما كان احتمال تجاهل العديد من مفرداته – سواء من قبيل السهو أو التعمد أو الإهمال –مما يؤثر على دقة النتائج ناهيك عن ضرورة توفر الجانب المادي والجهاز الإحصائي الكبير عند استخدامه ، وهذا يفسر لنا أن معظم الدراسات التي تستخدم هذا الأسلوب تقوم بها أجهزة الإحصاء فى الدولة مثل الجهاز المركزي للتعبئة العامة والإحصاء .

٢ – أسلوب العينات فى جمع البيانات :

العينة هي جزء من المجتمع الأصلي المراد تحديد خصائصه أو معالمه ، وقد تمثل نسبة مئوية من حجم المجتمع الإحصائي وأسلوب المعاينة الإحصائية هو استخدام أساليب العينات فى التوصل إلى خصائص المجتمع الأصلي ، وذلك من خلال تطبيق الطرق والنظريات الإحصائية .

الفرض الإحصائي

الفرض هو تعميم مبدئي عن أبعاد المشكلة موضوع الدراسة ، وتظل صلاحيته موضع اختبار حتى يتم الوصول إلى النتائج بعد جمع البيانات وتحليلها وتفسيرها ، وليس من الضروري أن تأتى هذه النتائج متفقة تماماً مع الفروض التي سبق وضعها ، وليست وظيفة البحث ترجيح أو رفض فرض معين ، وقد تكون النتائج السلبية التي يصل إليها الباحث أكثر قوة من النتائج الايجابية التي تتفق مع فروضه المبدئية وعموماً فإن مشكلة البحث تتضمن عدداً من الفروض القابلة للاختيار والفرض المحدد يمكن تكوينه عندما يكون هناك أساس معرفي مناسب فى مجال المشكلة .

وتستنبط الفروض بناء على الخبرة السابقة للباحث ، وكذلك من الدراسات التي أجريت في موضوع البحث ، أو الأبحاث المتصلة بهذا

الموضـوع . وحينمـا لا تتـوافر هـذه العناصـر فعلـى الباحـث أن يلجـأ إلـى الدراسة الاستطلاعية التي تمكنه من استخلاص بعض الفروض ، وجدير بالذكر أنه كلما اهتم الباحث باستخلاص فروض بحثه على أساس علمي ، وإدراك دقيـق لأبعـاد المشـكلة كلمـا كـان تصـميم البحـث أكثـر دقـة ووفـاء بأهدافه .

ولكي يقوم الباحث ببناء الأنماط الفرضية ، عليه إتباع ما يلي :

١- تحديد مشكلة البحث .

٢- تجميـع مـا يـرتبط بالبحـث مـن معطيـات سـواء اعتمـد علـى التـراث والأدبيات النظرية أو اعتمد على الدراسات السابقة فى موضوع بحثه، أو القريبة منه .

٣- حصر المتغيرات الهامة المتصلة بمشكلة البحث ، واستنباط الحلول المحتملة لمعرفة أسباب الظاهرة من خلال دراسات تمهيدية استطلاعية أو من خلال دراسات سابقة .

٤- صياغة الفروض حول العلاقة بين المتغيرات ، على أن يكون لكل مشكلة فرعية فرض خاص ، مع الابتعاد عن الفرض المطول الذي يضم أكثر من جزئية .

٥- توقـع وجـود بيانـات لتحليـل مـا سـوف يصـل إليـه مـن نتـائج وتحديـد الخصائص والسمات الواقعية المتصلة بمجتمع البحث .

٦- اختبار الفرض وتوضيح أهميته وأولوياته ، حسب طبيعة الدراسة أى أن تكـون الفـروض قابلـة للاختيـار ، وذلـك مـن خـلال احتوائهـا علـى مفاهيم ترتبط بظواهر علمية ، أى يمكن قياسها .

٧ – الارتباط بنظرية ، بمعنى أن الفروض يجب أن تستقى من افتراضات مرتبكة بالتراث المهني المتاح .

٨ – ألا توجد فروض متعارضة فى بحث واحد

وبناء على ما سبق ، فإن هناك نوعين من الفروض الإحصائية :

١ - الفرض الصفري Ho:

فالفرض الصفري أو فرض العدم ينص على عدم وجود فروق معنوية فى النتائج ، وبمعنى آخر بأن المتغير المستقبل لا يؤثر فى المتغير التابع أو أنه لا يوجد فرق بين خصائص العينة وخصائص المجتمع الذى سحب منه .

والجدير بالذكر أن أى فرض يختلف عن الفرض العدمى × أ يطلق عليه اسم الفرض البديل ونرمز له بالرمز H1 ففي أي اختبار إحصائي يوجد فرض عدمى واحد بينما يوجد عديد من الفروض البديلة .

٢ – الفرض البديل Hi :

الفرض البديل هو فرض بديل لفرض العدم ويمكن أن نحدد الفرض البديل من المثال التالي :

لا تتأثر العلاقة بين قراءة الصحف الحزبية وتكوين اتجاهات سلبية لدى القارئ حول الآراء الحكومي بدرجة انتظامه فى قراءة هذه الصحف . هذا ما نسميه فرض العدم Ho أما الفرض البديل Hi هو " تتأثر العلاقة بين قراءة الصحف الحزبية وتكوين اتجاهات سلبية لدى القارئ حول الأداء الحكومي بدرجة انتظامه فى قراءة هذه الصحف .

وقد يأخذ الفرض البديل الحالات التالية :

$$1 - Hi : \mu \neq \mu o$$

وهذا يعنى أن قيمة معلمة المجتمع تختلف عن ادعاء معين أو لا تساوى قيمة محددة، فقد تكون أكبر أو اقل من هذه القيمة μo ويجرى فى هذه الحالة اختبار لطرفي التوزيع .

$$2 - Hi : \mu > \mu o$$

ويشير الفرض البديل إلى أن معلمة المجتمع μ تكون أكب رمن القيمة الافتراضية أو الإحصاء المراد اختباره μo ويجرى فى هذه الحالة اختيار الطرف الأيمن من التوزيع .

$$3\text{- } Hi \; : \; \mu < \mu o$$

وهى تعنى أن معلمة المجتمع μ أقل من القيمة الافتراضية ، أو من الإحصاء المراد اختباره μo ويجرى فى هذه الحالة اختبار للطرف الأيسر من التوزيع.

المفاهيم المتصلة بفرض العدم Ho والفرض البديل Hi:

أ – مستوى المعنوية :

يطلق لفظ مستوى المعنوية على أقصى احتمال لوقوع خطأ من النوع الأول فى حالة اختبار الفرض الإحصائي ، وهو المستوى الذي يحدد وقوع بعض العينات المسحوبة من المجتمع بالفعل فى حدود فرض العدم أو بمعنى آخر " هو المخاطرة المحتملة فى رفض الفرض الإحصائي عندما يكون صحيحا وعادة ما يتحدد مستوى المعنوية والنسب التي تستخدم في معظم الحالات ٠,٠٥ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٠١ حيث تستخدم معايير كأحد مقاييس الرفض ويرمز لها بالرمز α ألف ويحدد مستوى المعنوية حجم المنطقة الحرجة .

ومن أكثر القيم التي تستخدم في التطبيقات العملية فى بحوث الإعلام القيمة α= ٥% أو القيمة α= ١% أكثر استخدام لقياس مستوى المعنوية.

الفصل الثاني

الارباعيات والمئينيات

- أولاً : نصف المدى الربيعى
- ثانياً : معامل الاختلاف
- ثالثاً : الدرجة المعيارية
- رابعاً : العشير والمئين

يقصد بالتشتت في أي مجموعة من القيم به درجة التفاوت أو الاختلاف بين قيم هذه المجموعة ، فإذا كانت قيم المجموعة متقاربة من بعضها البعض يكون التشتت صغيراً ، وإذا كانت متباعدة عن بعضها البعض أي متباينة يكون التشتت كبيراً .

ولمقارنة مجموعتين من البيانات لا تكتفي بمقاييس المتوسط التي سبق دراستها حيث قد يكون للمجموعتين نفس المتوسط ، ولكنها يختلفان في درجة التشتت، فقد نجد أن مفردات إحدى المجموعتين متجمعة حول متوسط المجموعة بينما مفردات المجموعة الأخرى منتشرة ومتباعدة عن متوسطها وعندئذ يقال إن المجموعة الأولى أقل تشتتا من المجموعة الثانية كما يتضح من المثال التالي .

مثال :

س : ١٢ ، ١٧ ، ٢٠ ، ٢ ، ٢٦

ص : ٨ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٣٤

حيث نجد أن المتغيرين س ، ص لهما نفس الوسط الحسابي ونفس الوسيط (٢٠) ، ولكنهما يختلفان في درجة التشتت حيث يتضح أن المتغير س أقل تشتتا من المتغير ص .

وتوجد عدة مقاييس تصلح لقياس درجة التشتت ، وهى : المدى المطلق ونصف المدى الربيعي ، والانحراف المتوسط والانحراف المعياري وغيرها من المقاييس التى نعرض لبعضها بالتفصيل .

أولاً : **نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي)** :

يطلق على نصف المدى الربيعي أيضا الانحراف الربيعي ، وهو يستخدم لمعالجة عيب المدى من تصادف وجود قيم شاذة طرفية للحد الأدنى والأعلى للقيم الظاهرة (بعد ترتيبها) وأيضاً استبعاد الربيع الأخير من البيانات الظاهرة ثم الحصول على نصف المدى بين الربيعين الأول والأخير.

أ – **حساب نصف المدى الربيعي من الدرجات الخام** :

نحسب نصف المدى الربيعي من المعادلة التالية :

$$\textbf{نصف المدى الربيعي} = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢}$$

حيث : ر ١ هو الارباعى الأول أو الربيع الأدنى أو الربيع الأول ورتبته (ن/٤) ، و ر٣ هو الارباعى الثالث أو الربيع الأعلى أو الربيع الثالث ورتبته (٣×ن/٤) ، ن عدد القيم .

مثال :

أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار عينة مكونة من ٨ مهندسين بإحدى شركات البترول ، حيث كانت البيانات هي :

٥٢ ، ٤١ ، ٥٤ ، ٤٢ ، ٤٧ ، ٣٨ ، ٣٥ ، ٣٧

الحـــل

نرتب البيانات تصاعدياً كالتالي :

٣٥ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٧ ، ٥٢ ، ٥٤

$$ن = ٨ \text{ ، رتبة } ر_{١} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

أي أن الربيع الأدنى هو القراءة الثانية من جهة اليمين ، ر ١ = ٣٧ سنة .

رتبة الربيع الأعلى $= \frac{٣ ن}{٤} = \frac{٣ \times ٨}{٤} = ٦$

أي أن ر٣ هو الحد السادس من جهة اليمين وقيمته = ٤٧ سنة

نصف المدى الربيعي فيكون $= \frac{ر٣ - ر١}{٢}$

$= \frac{٤٧ - ٣٧}{٢} = \frac{١٠}{٢} =$ ٥ سنوات

مثال :

أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار ٧ مهندسين بإحدى شركات قطاع الكهرباء ، حيث بياناتهم كالتالي :

٢٤ ، ٢٨ ، ٢٢، ٢٩ ، ٢٦ ، ٢١ ، ٣٠

الحـــل

نرتب البيانات تصاعدياً

٢١ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٢٦ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠

ن = ٧ ، ورتبة ر١ $= \frac{٧}{٤} = ١,٧٥$

وبالتالي يكون الربيع الأدنى قيمته هي متوسط الحدين الأول والثاني

وبذلك تكون قيمة الربيع الأدنى ر١$= \frac{٢١ + ٢٢}{٢} = ٢١,٥$ سنة

ورتبة ر٣ $= \frac{٣ ن}{٤} = \frac{٢١}{٤} = ٥,٢٥$

أي قيمة الربيع الأعلى هي متوسط الحدين الخامس والسادس أي قيمة الربيع الأعلى ر٣ هي :

$$ر_٣ = \frac{٢٨ + ٢٩}{٢} = ٢٨,٥ \text{ سنة}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{٢٨,٥ - ٢١,٥}{٢} = \frac{٧}{٢} = ٣,٥ \text{ سنة}$$

ب – حساب الانحراف الربيعي أو نصف المدى الربيعي من البيانات المبوبة :

لحساب الانحراف الربيعي أو نصف المدى الربيعي علينا :

١– تحديد الربيع الأول أو الأدنى والربيع الأخير أو الأعلى وذلك بقسمة مجموعة التكرارات ÷ ٤ فتتحدد رتبة الربيع الأول ، ثم يطرح رتبة الربيع الأول من مجموع التكرارات فتتحدد رتبة الربيع الثالث .

٢– حساب قيمة الربيع الأول والربيع الثالث بنفس طريقة إيجاد الوسيط وذلك باستخدام المعادلة التالية :

$$\textbf{الربيع} = \textbf{الحد الأدنى لفئة الربيع} + \frac{\textbf{ترتيب الربيع} - \textbf{ك م ص السابق}}{\textbf{ك م ص اللاحق} - \textbf{ك م ص السابق}} \times \textbf{ل}$$

٣ – إيجاد نصف المدى الربيعي من القانون التالي :

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الأول}}{٢}$$

مثال :

احسب الانحراف الربيعي (نصف المدى الربيعي) من الجدول التالي:

ف	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
ك	٦	٢٦	٣٦	٢٦	٦	١٠٠

الحـــــل

ف	ك	التكرار المتجمع الصاعد	
١٠-	٦	صفر	
٢٠-	٢٦	٦	الربيع الأول
٣٠-	٣٦	٣٢	
٤٠-	٢٦	٦٨	الربيع الثالث
٥٠-	٦	٩٤	
المجموع	١٠٠	١٠٠	

رتبة الربيع الأول = ١٠٠ ÷ ٤ = ٢٥

رتبة الربيع الثالث = ١٠٠ − ٢٥ = ٧٥

الربيع = الحد الأدنى لفئة الربيع + (ترتيب الربيع – ك م ص السابق) / (ك م ص اللاحق – ك م ص السابق) × ل

الربيع الأول = ٢٠ + (٢٥ − ٦) / (٣٢ − ٦) × ١٠ = ٢٧,٣

الربيع الثالث = ٤٠ + (٧٥ − ٦٨) / (٩٤ − ٦٨) × ١٠ = ٤٢,٧

نصف المدى الربيعى = (٤٢,٧ − ٢٧,٣) / ٢ = ٧,٧

ثانياً : معامل الاختلاف

عند مقارنة التوزيعات التكرارية تقابلنا صعوبة وهى الاختلاف في وحدات القياس ، فإذا أردنا مقارنة تشتت توزيع أطوال مجموعة من الأشخاص بتشتت توزيع أوزانهم نجد أن وحدات القياس المستخدمة في الحالة الأولى هي السنتيمترات بينما الوحدات المستخدمة في الحالة الثانية هي الكيلو جرامات والتخلص من هذه المشكلة يمكن استخدام مقياس نسبى للتشتت لا يتأثر بوحدات القياس المستخدمة في كل من التوزيعين .

فلو قسمنا الانحراف المعياري لكل توزيع على الوسط الحسابي لنفس التوزيع نحصل على مقياس نسبى للتشتت يعرف بمعامل الاختلاف حيث:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠$$

أو يمكن استخدام شكل آخر لمعامل الاختلاف :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف الربيعي}}{\text{الوسيط}} \times ١٠٠$$

أو شكل آخر :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{\text{الربيع الأعلى} + \text{الربيع الأدنى}} \times ١٠٠$$

مثال :

أوجد معامل الاختلاف مستخدما الوسط الحسابي من الجدول التالي :

الفئات	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٥	٣٠	٢٢	١٤	٩	١٠٠

الحـــل

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري باستخدام طريقة الانحرافات المختصرة نكون الجدول التالي :

ف	ك	س	ح	ك×ح	ك×ح ٢
٢٠-	١٠	٢٥	٢-	٢٠-	٤٠
٣٠-	١٥	٣٥	١-	١٥-	١٥
٤٠-	٣٠	٤٥	صفر	صفر	صفر
٥٠-	٢٢	٥٥	١	٢٢	٢٢
٦٠-	١٤	٦٥	٢	٢٨	٥٦
٧٠-	٩	٧٥	٣	٢٧	٨١
المجموع	١٠٠	---	---	٤٢	٢١٤

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{أ} + \frac{\text{مجـ ك×ح}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ل}$$

$$= ٤٥ + \frac{٤٢}{١٠٠} \times ١٠ = ٤٩,٢$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \text{ل} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ ك×ح}^{٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك ح}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ١٠ \times \sqrt{\frac{٢١٤}{١٠٠} - \left(\frac{٤٢}{١٠٠}\right)^{٢}}$$

$$= ١٠ \times ١,٤٠ = ١٤$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٤}{٤٩,٢} \times ١٠٠ = ٢٨,٤٥ \%$$

ثالثاً : الدرجة المعيارية

في بعض الأحيان قد يكون من المفيد مقارنة مفردة تنتمي إلى ظاهرة معينة بمفردة أخرى تنتمي إلى ظاهرة أخرى ، وفى هذه الحالة يمكن استخدام ما يسمى بالدرجات أو الوحدات المعيارية .

وتمثل الوحدة المعيارية كمية مجردة من خصائص الظاهرة وليس لها حجم ، بمعنى أنها مستقلة عن وحدة قياس الظاهرة . وهى تستخدم كلا من مقاييس النزعة المركزية والتشتت في حسابها ولا تعتبر أحدهم فإذا فرضنا مثلا أن طالباً حصل على ٨٥ درجة في مادة الفلسفة ، وعلى ٧٥ درجة في مادة علم النفس ، فليس من المنطقي أن نقارن بين مستوى الطالب في كل من المادتين على أساس الدرجة التي حصل عليها ، بل لابد من مقارنة ذلك بالنسبة لتوزيع درجات الطلاب في كل مادة ، ولإجراء هذه المقارنة يجب أن نقارن بين موضع كل من هاتين القيمتين على التوزيع الخاص بهما ، أي معرفة بعد الدرجة عن الوسط الحسابي بدلالة وحدات الانحراف المعياري .

ويتم ذلك بطرح الوسط الحسابي لكل توزيع من القيمة الخاصة به ، وقسمة الناتج على الانحراف المعياري ، فنحصل على الدرجة المعيارية.

وإذا افترضنا أن متوسط درجات مادة الفلسفة = ٨٠ درجة وأن الانحراف المعياري = ٥ ، بينما كان متوسط درجات مادة علم النفس ٧٠ والانحراف المعياري = ٣ ، فمعنى ذلك أن درجات الطالب في مادة الفلسفة تبعد عن المتوسط بمقدار :

$$\frac{٨٥ - ٨٠}{٥} = ١ \text{ درجة معيارية}$$

وأن درجته في مادة علم النفس تبعد عن المتوسط بمقدار :

$$\frac{٧٥ - ٧٠}{٣} = ١,٦٧ \text{ درجة معيارية}$$

وعلى هذا يصبح الطالب قد حصل على درجة في علم النفس أبعد عن المتوسط من درجته في الفلسفة ، بمعنى أن مستواه في مادة علم النفس أعلى من مستواه في الفلسفة ، على الرغم من ارتفاع درجته فيها .

فإذا كان لدينا مجموعة من المفردات ثم حسبنا الوسط الحسابي "س "والانحراف المعياري "ع " لهذه المجموعة ثم طرحنا قيمة الوسط الحسابي من كل مفردة من مفردات المجموعة وقسمنا الناتج على قيمة الانحراف المعياري فان القيم الجديدة التي نحصل عليها تكون مقسمة بوحدات تعرف بالوحدات المعيارية .

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{المتغير الأصلي} - \text{الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

وذلك عندما يكون المنحنى اعتداليا ويصلح التوزيع لاستخراج الوسط الحسابي والانحراف المعياري .

ويمكن إيجاد القيمة المعيارية من الجداول التي لا يصلح فيها استخراج الوسط الحسابي والانحراف المعياري ، ويمكن استخراج الوسيط ونصف المدى الربيعى ، وهنا تصبح المعادلة على النحو التالي :

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{القيمة ألأصلية} - \text{الوسيط}}{\text{نصف المدى الربيعي}}$$

ومن الواضح أن الدرجة المعيارية قد تكون موجبة أو سالبة الإشارة حسب زيادتها أو نقصانها عن المتوسط الحسابي .

وتمتاز الدرجة المعيارية بأن قيمتها لا تخرج عن المدى من -٣ إلى =٣ في جميع المجموعات ، وأن الوسط الحسابي لها = صفر ، وأن الانحراف المعياري لها يساوى الواحد الصحيح .

مثال :

الجدول التكراري التالي يبين التوزيع التكراري لطلاب الفرقة الثانية بقسم الاجتماع بجامعة المنصورة وعددهم ٢٠٠ طالباً وفقاً لفئات الدرجات التي حصلوا عليها في مادة الإحصاء فإذا كانت الدرجة النهائية للمادة ٢٠ درجة، في حين حصل الطالب محمد إسماعيل على ١٣ درجة ، أوجد الدرجة المعيارية لهذا الطالب لتحديد مركز الدرجة التي حصل عليها.

ف	٢-	٤-	٦-	٨-	١٠-	١٢-	١٤-	١٦-	١٨-	مجموع
ك	١٠	١٨	١٢	٨	٣٥	٤٤	٣٨	٢٢	١٣	٢٠٠

الحل

ف	ك	س	ح	ك×ح	ك×ح٢
٢-	١٠	٣	٤-	٤٠-	١٦٠
٤-	١٨	٥	٣-	٥٤-	١٦٢
٦-	١٢	٧	٢-	٢٤-	٤٨
٨-	٨	٩	١-	٨-	٨
١٠-	٣٥	١١	صفر	صفر	صفر
١٢-	٤٤	١٣	١	٤٤	٤٤
١٤-	٣٨	١٥	٢	٧٦	١٥٢
١٦-	٢٢	١٧	٣	٦٦	١٩٨
١٨-	١٣	١٩	٤	٥٢	٢٠٨
مجموع	٢٠٠	---	---	١١٢	٩٨٠

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{أ} + \frac{\text{مجـ ك} \times \text{ح}}{\text{مجـ ك}} \times \text{ل}$$

$$= ١١ + \frac{١١٢}{٢٠٠} \times ٢ = ١٢,٢$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \text{ل} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ ك} \times \text{ح}^{٢}}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ ك ح}}{\text{مجـ ك}}\right)^{٢}}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ٢ \times \sqrt{\frac{٩٨٠}{٢٠٠} - \left(\frac{١١٢}{٢٠٠}\right)^{٢}}$$

$$= ٢ \times ٢,١٤ = ٤,٢٨$$

$$\text{الدرجة المعيارية} = \frac{١٣ - ١٢,٢}{٤,٢٨} = ٠,١٩$$

أي أن هذه القيمة (١٣) تزيد عن المتوسط ٠,١٩ درجة معيارية .

رابعاً : العشير والمئين :

المئينات هي النقط التي تقسم التوزيع التكراري إلى أجزاء مئوية والاعشاريات هي النقط التي تقسم التوزيع التكراري إلى أجزاء عشرية .

ولا تختلف طريقة حساب المئينات أو الإعشاريات عن طريق الارباعيات إلا في الخطوة الأولى التي تحدد ترتيب الربيع وترتيب المئين أو الاعشارى ، مثلما اختلف الارباعيات عن الوسيط في نفس الخطوة .

أ - العشير

١ – حساب العشير من الدرجات الخام :

وهو يشبه حساب الوسيط من البيانات الخام .

مثال :

على مدى ١٠ سنوات تم رصد سعر الصرف بالجنيه المصري للدولار الأمريكي كما يلي : ٢٨٨ ، ٤٨ ، ٨٥ ، ٣٢٥ ، ٩٦ ، ٩٦ ، ١٢٧ ، ٢١٥ ، ٢٣٥ ، ٣٣٥ – أوجد العشير الأول والعشير الأخير .

الحـــــل

نرتب البيانات ترتيباً تصاعديا

٤٨ ، ٨٥ ، ٩٦ ، ٩٦ ، ١٢٧ ، ٢١٥ ، ٢٣٥ ، ٢٨٨ ، ٣٢٥ ، ٣٣٥

ترتيب العشير الأول = ك × $\frac{١}{١٠}$

= ١٠ × $\frac{١}{١٠}$ = ١

العشير الأول = ٤٨

ترتيب العشير الأخير = ك × $\frac{١٠}{١٠}$

= ١٠ × ١ = ١٠

العشير الأخير = ٢٣٥

$$\text{معنى هذا أن رتبة العشير الأول} = \text{ك} \times \frac{١}{١٠}$$

$$\text{ورتبة العشير الثاني} = \text{ك} \times \frac{٢}{١٠}$$

$$\text{ورتبة العشير الرابع} = \text{ك} \times \frac{٤}{١٠}$$

$$\text{ورتبة العشير العاشر} = \text{ك} \times \frac{١٠}{١٠}$$

٢ – حساب العشير من الجدول التكراري :

$$\textbf{العشير} = \textbf{الحد الأدنى لفئة العشير} + \frac{\textbf{ترتيب العشير – ك م ص السابق}}{\textbf{ك م ص اللاحق – ك م ص السابق}} \times \textbf{ل}$$

مثال:

باستخدام بيانات الجدول التكراري التالي :

الفئات	٥٠–	٦٠–	٧٠–	٨٠–	٩٠–١٠٠	المجموع
التكرار	١٥	٢٥	٣٥	٢٨	١٧	١٢٠

أوجد : ١ – العشير الثالث

٢– العشير السابع

الحــل

$$\text{رتبة العشير الثالث} = \text{ك} \times \frac{٣}{١٠} = ١٢٠ \times \frac{٣}{١٠} = ٣٦$$

$$\text{رتبة العشير السابع} = \text{ك} \times \frac{٧}{١٠} = ١٢٠ \times \frac{٧}{١٠} = ٨٤$$

الفئات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد	
٥٠-	١٥	صفر	
٦٠-	٢٥	١٥	العشير الثالث
٧٠-	٣٥	٤٠	
٨٠-	٢٨	٧٥	العشير السابع
٩٠-	١٧	١٠٣	
المجموع	١٢٠	١٢٠	

رتبة العشير الثالث = ١٢٠ × ٣ ÷ ١٠ = ٣٦

رتبة العشير السابع = ١٢٠ × ٧ ÷ ١٠ = ٨٤

$$\textbf{العشير} = \textbf{الحد الأدنى لفئة العشير} + \frac{\textbf{ترتيب العشير – ك م ص السابق}}{\textbf{ك م ص اللاحق – ك م ص السابق}} \times \textbf{ل}$$

$$\text{العشير الثالث} = ٦٠ + \frac{٣٦ - ١٥}{٤٠ - ١٥} \times ١٠ = ٦٨,٤$$

$$\text{العشير الثالث} = ٨٠ + \frac{٨٤ - ٧٥}{١٠٣ - ٧٥} \times ١٠ = ٨٣,٢٢$$

ب – المئين :

١ – حساب المئين من الدرجات الخام :

لحساب المئين من البيانات الخام نتبع ما يلي :

أ – نرتب البيانات تصاعديا

٢– رتبة المئين كما يلي :

ترتيب المئين الأول = ك × $\frac{١}{١٠٠}$

ترتيب المئين الثاني = ك × $\frac{٢}{١٠٠}$

ترتيب المئين الثالث = ك × $\frac{٣}{١٠٠}$

ترتيب المئين الخمسين = ك × $\frac{٥٠}{١٠٠}$ وهكذا

مثال:

أوجد المئين الخمسين من البيانات التالية :

٢٨٨ ، ٣٨ ، ٨٥ ، ٣٢٥ ، ٩٦ ، ٩٦ ، ١٢٧ ، ٢١٥ ، ٢٣٥ ، ٣٣٥

الـــحل

أ – نرتب البيانات كما يلي :

٣٨ ، ٨٥ ، ٩٦ ، ٩٦ ، ١٢٧ ، ٢١٥ ، ٢٣٥ ، ٢٨٨ ، ٣٢٥ ، ٣٣٥

ب – ترتيب المئين الخمسين = ك × $\frac{٥٠}{١٠٠}$ = ١٠ × $\frac{٥٠}{١٠٠}$ = ٥

المئين الخمسين = ١٢٧

٢- حساب المئين من الجداول التكرارية :

لحساب المئين من الجداول التكرارية نتبع ما يلي :

أ – تحديد رتبة المئين

ب– نحسب قيمة المئين من القانون التالي :

$$\text{المئين} = \text{الحد الأدنى لفئة المئين} + \frac{\text{ترتيب المئين} - \text{ك م ص السابق}}{\text{ك م ص اللاحق} - \text{ك م ص السابق}} \times \text{ل}$$

مثال :

أوجد المئين الخمسين من بيانات الجدول التكراري التالي :

ف	١٠٠-	١١٠-	١٢٠-	١٣٠-	١٤٠-	١٥٠-	١٦٠-	١٧٠-	المجموع
تكرار	٨	١٤	٢٠	٢٧	١٥	٩	٥	٢	١٠٠

الحـــل

$$\text{رتبة المئين الخمسين} = \text{ك} \times \frac{٥٠}{١٠٠}$$

$$= ١٠٠ \times \frac{٥٠}{١٠٠} = ٥٠$$

الفئات	التكرارات	التكرار المتجمع الصاعد	
-١٠٠	٨	صفر	
-١١٠	١٤	٨	
-١٢٠	٢٠	٢٢	
-١٣٠	٢٧	٤٢	المئين ٥٠
-١٤٠	١٥	٦٩	
-١٥٠	٩	٨٤	
-١٦٠	٥	٩٣	
-١٧٠	٢	٩٨	
المجموع	١٠٠	١٢٠	

قيمة المئين الخمسين = ١٣٠ + (٥٠ − ٤٢) / (٦٩ − ٤٢) × ١٠

= ١٣٠ + ٢,٩٦ = ١٣٢,٩٦



الفصل الثالث

اختبار كا^{2}

- مقدمه :
- أولاً : الطريقة العامة لحساب كا^{2}
- ثانياً : تحديد مدى دلالة كا^{2} من عدمه .
- ثالثاً : الطريقة العامة لحساب كا^{2} من الجدول التكرارى ١×٢ .
- رابعاً : الطريقة المختصرة لحساب كا^{2} من الجدول التكرارى ١×٢ .
- خامساً : الطريقة العامة لحساب كا^{2} من الجدول التكرارى ١×ن .
- سادساً : الطريقة العامة لحساب كا^{2} من الجدول التكرارى ٢×٢ .
- سابعاً : الطريقة المختصرة لحساب كا^{2} من الجدول التكرارى ٢×٢ .
- ثامناً : الطريقة العامة لحساب كا^{2} من الجدول التكرارى ن×ن .
- تاسعاً : حساب كا^{2} لدلالة فروق النسب المرتبطة .



مقدمه :

ترجع النشأة الأولى لاختبار كا^{2} إلى البحث الذي نشره كارل بيرسون فى أوائل القرن العشرين وهى تعد من أهم اختبارات الدلالة الإحصائية وأكثرها شيوعاً لأنها لا تعتمد على شكل التوزيع ولذا فهى تعد من المقاييس اللابارامترية أى مقاييس التوزيعات الحرة ولأنها تحسب لكل خلية من خلايا أى جدول تكرارى ثم تجميع القيم الجزئية للحصول على القيمة الكارلية لـ كا^{2} .

وتستخدم كا^{2} لحساب دلالة فروق التكرار أو البيانات العددية التي يمكن تحويلها إلى تكرار مثل النسب والاحتمال .

الطريقة العامة لحساب كا^{2}

$$كا^{2} = مجـ \frac{(ت_{و} - ت_{م})^{2}}{ت_{و}}$$

حيث :

ت$_{و}$: هو التكرار الواقعى الذي يحدث بالفعل والموجود بالجدول .

ت$_{م}$: هو التكرار المتوقع حدوثه ويختلف حسابه باختلاف نوع الجدول المطلوب حساب كا^{2} منه .

تحديد مدى دلالة كا^{٢} من عدمه

فـى جميـع الحـالات نخـرج مـن الحسـابات بقيمـة كـا^{٢} المحسـوبة نقارنها بقيمة كا^{٢} الجدولية كالتالى :

- إذا كانـت كـا^{٢} المحسوبة > كـا^{٢} الجدوليـة فـان كـا^{٢} تكـون دالة إحصائية .
- إذا كانـت كـا^{٢} المحسوبة < كـا^{٢} الجدوليـة فـان كـا^{٢} ليسـت دالة إحصائية .

حالات حساب كا^{٢} من الجداول المختلفة :

١- الحالة الأولى : الطريقة العامة لحساب كـا^{٢} مـن الجـدول التكراري ١×٢ :

يتكـون الجـدول ١×٢ مـن صـف واحـد وعمـودين دون خلايـا المجموع إن وجدت بالجدول .

ولحساب قيمة كا^{٢} فى هذا الجدول تحسب من القانون العام :

$$\text{كا}^{٢} = \text{مجـ} \frac{(\text{ت}_{\text{و}} - \text{ت}_{\text{م}})^{٢}}{\text{ت}_{\text{و}}}$$

حيـث ت$_{م}$ هنـا تسـاوى متوسـط التكـرارات الواقعيـة الموجـودة بالجدول.

<u>مثال</u> :

الجدول التالي يوضح آراء ٨٠ شخص فى استبيان دار حول رفض أو قبول قضية الزواج العرفي .

مج	غير موافق	موافق	الرأي
٨٠	٢٠	٦٠	التكرار

والمطلوب حساب قيمة كا^{٢} مع بيان مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى دلالة ٠,٠٥ ؟

<u>الحل</u> :

<u>حساب التكرار المتوقع ($ت_{م}$) :</u>

$$ت_{م} = \frac{٦٠ + ٢٠}{٢} = ٤٠$$

<u>حساب كا^{٢} المحسوبة :</u>

نكون الجدول التالي :

$\frac{(ت_{و} - ت_{م})^{٢}}{ت_{م}}$	$(ت_{و} - ت_{م})^{٢}$	$ت_{و} - ت_{م}$	$ت_{م}$	$ت_{و}$
١٠	٤٠٠	٢٠	٤٠	٦
١٠	٤٠٠	-٢٠	٤٠	٢٠
٢٠	مجموع	-	-	-

من الجدول مباشرة فان مجموع العمود الأخير يعطينا قيمة $كا^{2}$

$كا^{2}$ المحسوبة = ٢٠ .

<u>حساب $كا^{2}$ الجدولية :</u>

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = عدد الأعمدة – ١ = ٢ – ١ = ١

مستوى الدلالة = ٠,٠٥ .

بالبحث فى جداول $كا^{2}$ عند درجة حرية = ١ ومستوى دلالة ٠,٠٥ نجد قيمة $كا^{2}$ الجدولية = ٣,٨٤١ .

<u>تحديد مدى دلالة $كا^{2}$:</u>

نقارن قيمة $كا^{2}$ المحسوبة بقيمة $كا^{2}$ الجدولية نجد أن :

قيمة $كا^{2}$ المحسوبة = ٢٠ > قيمة $كا^{2}$ الجدولية = ٣,٨٤١

لذا فان $كا^{2}$ دالة إحصائية عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .

٢- الحالة الثانية : الطريقة المختصرة لحساب $كا^{2}$ من الجدول التكراري ١×٢ :

لحساب قيمة $كا^{2}$ فى هذا الجدول بالطريقة المختصرة فان قيمة $كا^{2}$ من العلاقة :

$$كا^{2} = \frac{(ت_{1} - ت_{2})^{2}}{ت_{1} + ت_{2}}$$

حيث $ت_{1}$ هو التكرار الأكبر و $ت_{2}$ هي التكرار الأصغر .

مثال :

الجدول التالي يوضح آراء ٨٠ شخص فى استبيان دار حول رفض أو قبول قضية الزواج العرفي .

الرأي	موافق	غير موافق	مج
التكرار	٦٠	٢٠	٨٠

والمطلوب حساب قيمة كا^{٢} بالطريقة المختصرة مع بيان مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى دلالة ٠,٠٥ ؟

الحل :

حساب كا^{٢} المحسوبة :

$$كا^{٢} = \frac{(٦٠ - ٢٠)^{٢}}{٦٠ + ٢٠} = \frac{١٦٠٠}{٨٠} = ٢٠$$

حساب كا^{٢} الجدولية :

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = عدد الأعمدة – ١ = ٢ – ١ = ١

مستوى الدلالة = ٠,٠٥ .

بالبحث فى جداول كا^{٢} عند درجة حرية = ١ ومستوى دلالة ٠,٠٥ نجد قيمة كا^{٢} الجدولية = ٣,٨٤١ .

تحديد مدى دلالة كا^{٢} :

نقارن قيمة كا^{٢} المحسوبة بقيمة كا^{٢} الجدولية نجد أن

قيمة كا^{٢} المحسوبة = ٢٠ > قيمة كا^{٢} الجدولية = ٣,٨٤١

لذا فان كا^{٢} دالة إحصائية عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .

٣- الحالة الثالثة : الطريقة العامة لحساب كا^{٢} من الجـدول التكراري ١×ن :

يتكون الجدول ١×ن من صف واحد وعدد (ن) عمود دون خلايا المجموع إن وجدت بالجدول .

ولحساب قيمة كا^{٢} فى هذا الجدول تحسب من القانون العام :

$$\text{كا}^{٢} = \text{مجـ} \frac{(\text{ت}_{\text{و}} - \text{ت}_{\text{م}})^{٢}}{\text{ت}_{\text{و}}}$$

حيـث ت$_{\text{م}}$ هنـا تسـاوى متوسـط التكـرارات الواقعيـة الموجـودة بالجدول.

مثال :

الجـدول التـالي يوضـح آراء ٣٠ شـخص فـى اسـتبيان دار حـول قضية الزواج العرفي .

الرأي	موافق	لا أدرى	معارض	مج
التكرار	١٢	٢	١٦	٣٠

والمطلوب حساب قيمة كا^{٢} مـع بيـان مـدى دلالتهـا إحصـائيا عنـد مستوى دلالة ٠,٠٥ ؟

الحل :

حساب التكرار المتوقع ($ت_م$) :

$$ت_م = \frac{١٢ + ٢ + ١٦}{٣} = ١٠$$

حساب $كا^٢$ المحسوبة :

نكون الجدول التالي :

$\frac{(ت_و - ت_م)^٢}{ت_م}$	$(ت_و - ت_م)^٢$	$ت_و - ت_م$	$ت_م$	$ت_و$
٠,٤	٤	٢	١٠	١٢
٦,٤	٦٤	–٨	١٠	٢
٣,٦	٣٦	٦	١٠	١٦
١٠,٤	مجموع	–	–	–

من الجدول مباشرة فان مجموع العمود الأخير يعطينا قيمة $كا^٢$

$كا^٢$ المحسوبة = ١٠,٤ .

حساب $كا^٢$ الجدولية :

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = عدد الأعمدة – ١ = ٣ – ١ = ٢

مستوى الدلالة = ٠,٠٥ .

بالبحث فى جداول كا^{٢} عند درجة حرية = ٢ ومستوى دلالة ٠,٠٥ نجد قيمة كا^{٢} الجدولية = ٥,٩٩١ .

<u>تحديد مدى دلالة كا^{٢} :</u>

نقارن قيمة كا^{٢} المحسوبة بقيمة كا^{٢} الجدولية نجد أن قيمة كا^{٢} المحسوبة = ١٠,٤ > قيمة كا^{٢} الجدولية = ٥,٩٩١

لذا فان كا^{٢} دالة إحصائية عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .

٤- الحالة الرابعة : الطريقة العامة لحساب كا^{٢} من الجدول التكراري ٢×٢ :

يتكون الجدول ٢×٢ من صفين وعمودين دون خلايا المجموع إن وجدت بالجدول .

ولحساب قيمة كا^{٢} فى هذا الجدول تحسب من القانون العام :

$$\text{كا}^{٢} = \text{مجـ} \frac{(\text{ت}_{\text{و}} - \text{ت}_{\text{م}})^{٢}}{\text{ت}_{\text{و}}}$$

وتحسب ت$_{\text{م}}$ لكل خلية فى هذا الجدول على حده من العلاقة :

$$\text{ت}_{\text{م}} = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{المجموع الكلى}}$$

مثال :

الجدول التالي يوضح العلاقة بين المتغيرين النوع وتأييد برنامج تليفزيوني معين .

النوع / الفكرة	ذكور	إناث	المجموع
مؤيد	٣٥	٣٧	٧٢
معارض	١٤	٣٤	٤٨
المجموع	٤٩	٧١	١٢٠

والمطلوب حساب قيمة كا^{٢} مع بيان مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى دلالة ٠,٠٥ ؟

الحل :

حساب التكرار المتوقع (ت$_{م}$) :

$$\text{ت}_{م} \text{ للخلية الأولى (٣٥)} = \frac{٧٢ \times ٤٩}{١٢٠} = ٢٩,٤$$

$$\text{ت}_{م} \text{ للخلية الثانية (٣٧)} = \frac{٧٢ \times ٧١}{١٢٠} = ٤٢,٦$$

$$\text{ت}_\text{م} \text{ للخلية الثالثة (١٤)} = \frac{٤٨ \times ٤٩}{١٢٠} = ١٩,٦$$

$$\text{ت}_\text{م} \text{ للخلية الرابعة (٣٤)} = \frac{٤٨ \times ٧١}{١٢٠} = ٢٨,٤$$

حساب كا^٢ المحسوبة :

نكون الجدول التالي :

$\text{ت}_\text{و}$	$\text{ت}_\text{م}$	$\text{ت}_\text{و} - \text{ت}_\text{م}$	$(\text{ت}_\text{و} - \text{ت}_\text{م})^٢$	$\frac{(\text{ت}_\text{و} - \text{ت}_\text{م})^٢}{\text{ت}_\text{م}}$
٣٥	٢٩,٤	٥,٦	٣١,٣٦	١,٠٦
٣٧	٤٢,٦	٥,٦-	٣١,٦	٠,٧٤
١٤	١٩,٦	٥,٦-	٣١,٣٦	١,٦
٣٤	٢٨,٤	٥,٦	٣١,٣٦	١,١
–	–	–	مجموع	٤,٥

من الجدول مباشرة فان مجموع العمود الأخير يعطينا قيمة كا^٢

كا^٢ المحسوبة = ٤,٥ .

حساب كا^٢ الجدولية :

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = (عدد الصفوف – ١) × (عدد الأعمدة – ١)

= (٢ – ١) × (٢ – ١) = ١ × ١ = ١

مستوى الدلالة = ٠,٠٥ .

بالبحث فى جداول كا^{٢} عند درجة حرية = ١ ومستوى دلالة ٠,٠٥ نجد قيمة كا^{٢} الجدولية = ٣,٨٤١

<u>تحديد مدى دلالة كا^{٢} :</u>

نقارن قيمة كا^{٢} المحسوبة بقيمة كا^{٢} الجدولية نجد أن :

قيمة كا^{٢} المحسوبة = ٤,٥ > قيمة كا^{٢} الجدولية = ٣,٨٤١

لذا فان كا^{٢} دالة إحصائية عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .

٥- الحالة الخامسة : الطريقة المختصرة لحساب كا^{٢} من الجدول التكراري ٢×٢ :

يتكون الجدول ٢×٢ من صفين وعمودين دون خلايا المجموع إن وجدت بالجدول .

ولحساب قيمة كا^{٢} فى هذا الجدول بالطريقة المختصرة نطبق القانون التالي :

$$\text{كا}^{٢} = \text{فاى}^{٢} \times \text{ن}$$

حيث :

فاى : هو معامل ارتباط فاى والذى يحسب من العلاقة :

$$\text{فاى} = \frac{\text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\sqrt{\text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز} \times \text{ح}}}$$

حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز ، ح ، ن

هم خلايا الجدول الرباعى الخلايا كما بالشكل التالى :

الفكرة / النوع	ذكور	إناث	المجموع
مؤيد	أ	ب	ح
معارض	جـ	د	ز
المجموع	هـ	و	ن

مثال :

الجدول التالي يوضح العلاقة بين المتغيرين النوع وتأييد برنامج تليفزيوني معين .

الفكرة / النوع	ذكور	إناث	المجموع
مؤيد	٣٥	٣٧	٧٢
معارض	١٤	٣٤	٤٨
المجموع	٤٩	٧١	١٢٠

والمطلوب حساب قيمة كا^{٢} مع بيان مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى دلالة ٠,٠٥ ؟

الحل :

حساب معامل فاى :

نعوض فى العلاقة :

$$\text{فاى} = \frac{\text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\sqrt{\text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز} \times \text{ح}}}$$

$$\text{فاى} = \frac{٣٥ \times ٣٤ - ٣٧ \times ١٤}{\sqrt{٤٩ \times ٧١ \times ٤٨ \times ٧٢}}$$

فاى = ٠,١٩

حساب كا^{٢}:

كا^{٢} = فاى^{٢} × ن

كا^{٢} = (٠,١٩)^{٢} × ١٢٠ = ٤,٣٣

حساب كا^{٢} الجدولية :

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = (عدد الصفوف – ١) × (عدد الأعمدة – ١)

= (٢ – ١) × (٢ – ١) = ١ × ١ = ١

مستوى الدلالة = ٠,٠٥ .

بالبحث فى جداول كا^{2} عند درجة حرية = ١ ومستوى دلالة ٠,٠٥ نجد قيمة كا^{2} الجدولية = ٣,٨٤١

<u>تحديد مدى دلالة كا^{2} :</u>

نقارن قيمة كا^{2} المحسوبة بقيمة كا^{2} الجدولية نجد أن :

قيمة كا^{2} المحسوبة = ٤,٣٣ > قيمة كا^{2} الجدولية = ٣,٨٤١

لذا فان كا^{2} دالة إحصائية عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .

٦- الحالة السادسة : الطريقة العامة لحساب كا^{2} من الجدول التكراري ن×ن :

يتكون الجدول ن×ن من عدد (ن) من الصفوف وعدد (ن) من الأعمدة دون خلايا المجموع إن وجدت بالجدول .

ولحساب قيمة كا^{2} فى هذا الجدول تحسب من القانون العام :

$$\text{كا}^{2} = \text{مجـ} \frac{(\text{ت}_{\text{و}} - \text{ت}_{\text{م}})^{2}}{\text{ت}_{\text{و}}}$$

وتحسب $\text{ت}_{\text{م}}$ لكل خلية فى هذا الجدول على حده من العلاقة :

$$\text{ت}_{\text{م}} = \frac{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}{\text{المجموع الكلى}}$$

مثال :

الجدول التالي يوضح العلاقة بين المتغيرين النوع وتأييد برنامج تليفزيوني معين .

الفكرة / النوع	موافق جدا	موافق نوعاً ما	لا أدرى	أرفض نوعاً ما	أرفض جداً	المجموع
ذكور	٥	٣٧	١٣	٢٨	٥	٨٨
إناث	٣	١٧	٨	٢٠	٥	٥٣
المجموع	٨	٥٤	٢١	٤٨	١٠	١٤١

والمطلوب حساب قيمة كا^{٢} مع بيان مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى دلالة ٠,٠٥ ؟

الحل :

حساب التكرار المتوقع (ت$_{م}$) :

$$\text{ت}_{م} \text{ للخلية الأولى (٥)} = \frac{٨٨ \times ٨}{١٤١} = ٥$$

$$\text{ت}_{م} \text{ للخلية الثانية (٣٧)} = \frac{٨٨ \times ٥٤}{١٤١} = ٣٣,٧$$

$ت_{م}$ للخلية الثالثة (١٣) = $\frac{٢١ \times ٨٨}{١٤١}$ = ١٣,١

$ت_{م}$ للخلية الرابعة (٢٨) = $\frac{٤٨ \times ٨٨}{١٤١}$ = ٢٩,٩٥

$ت_{م}$ للخلية الخامسة (٥) = $\frac{١٠ \times ٨٨}{١٤١}$ = ٦,٢٤

$ت_{م}$ للخلية السادسة (٣) = $\frac{٨ \times ٥٣}{١٤١}$ = ٣

$ت_{م}$ للخلية السابعة (١٧) = $\frac{٥٤ \times ٥٣}{١٤١}$ = ٢٠,٢٩

$ت_{م}$ للخلية الثامنة (٨) = $\frac{٢١ \times ٥٣}{١٤١}$ = ٧,٨٩

$ت_{م}$ للخلية التاسعة (٢٨) = $\frac{٤٨ \times ٥٣}{١٤١}$ = ١٨

$ت_{م}$ للخلية العاشرة (٥) = $\frac{١٠ \times ٥٣}{١٤١}$ = ٣,٧٥

<u>حساب كا² المحسوبة :</u>

نكون الجدول التالي :

$ت_{و}$	$ت_{م}$	$ت_{و} - ت_{م}$	$(ت_{و} - ت_{م})^{2}$	$\frac{(ت_{و} - ت_{م})^{2}}{ت_{م}}$
٥	٣٧	٥	٠	٠
٣٧	٣٣,٧	٣,٣	١٠,٩	٠,٣٢
١٣	١٣,١	-٠,١	٠,٠١	٠
٢٨	٢٩,٩٥	-١,٥٩	٣,٨	٠,١٣
٥	٦,٢٤	-١,٢٤	١,٥	٠,٢٤
٣	٣	٠	٠	٠
١٧	٢٠,٢٩	-٣,٢٩	١٠,٨	٠,٥٣
٨	٧,٨٩	٠,١١	٠,٠١	٠
٢٠	١٨	٢	٤	٠,٢٢
٥	٣,٧٥	١,٢٥	١,٥٦	٠,٤٢
–	–	–	مجموع	١,٨٦

من الجدول مباشرة فان مجموع العمود الأخير يعطينا قيمة كا²

كا² المحسوبة = ١,٨٦ .

<u>حساب كا² الجدولية :</u>

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = (عدد الصفوف – ١) × (عدد الأعمدة – ١)

= (٢ – ١) × (٥ – ١) = ١ × ٤ = ٤

مستوى الدلالة = ٠,٠٥ .

بالبحث فى جداول كا^{٢} عند درجة حرية = ٤ ومستوى دلالة ٠,٠٥ نجد قيمة كا^{٢} الجدولية = ٩,٤٨٨

<u>تحديد مدى دلالة كا^{٢} :</u>

نقارن قيمة كا^{٢} المحسوبة بقيمة كا^{٢} الجدولية نجد أن :

قيمة كا^{٢} المحسوبة = ١,٨٦ $<$ قيمة كا^{٢} الجدولية = ٩,٤٨٨

لذا فان كا^{٢} ليست دالة إحصائية عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .

٧- الحالة السابعة : حساب كا^{٢} لدلالة فروق النسب المرتبطة

نحسب قيمة كا^{٢} لدلالة فروق النسب المرتبطة بالجدول الرباعى الخلايا ٢×٢ من العلاقة :

$$\text{كا}^{٢} = \frac{(\text{ب} - \text{جـ})^{٢}}{\text{ب} + \text{جـ}}$$

حيث أن ب ، جـ هم خلايا بالجدول الرباعى كما بالشكل :

أ	ب
جـ	د

مثال :

احسب قيمة كا^2 لدلالة فروق النسب المرتبطة التالية مع بيان مدى دلالتها إحصائيا عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .

النوع / الفكرة	ذكور	إناث	مج
مؤيد	٢٥	١٥	٤٠
معارض	٥	٥٥	٦٠
مج	٣٠	٧٠	١٠٠

الحل :

حساب قيمة كا^2 المحسوبة :

$$\text{كا}^2 = \frac{(١٥ - ٥)^2}{١٥ + ٥}$$

$$\text{كا}^2 = ٥$$

حساب كا^2 الجدولية :

لحسابها يلزم حساب درجة الحرية ومستوى الدلالة :

درجة الحرية = (عدد الصفوف – ١) × (عدد الأعمدة – ١)

= (٢ – ١) × (٢ – ١) = ١ × ١ = ١

مستوى الدلالة = ٠,٠٥ .

بالبحث فى جداول كا^{2} عند درجة حرية = ١ ومستوى دلالة ٠,٠٥ نجد قيمة كا^{2} الجدولية = ٣,٨٤١

<u>تحديد مدى دلالة كا٢ :</u>

نقارن قيمة كا^{2} المحسوبة بقيمة كا^{2} الجدولية نجد أن :

قيمة كا^{2} المحسوبة = ٥ > قيمة كا^{2} الجدولية = ٣,٨٤١

لذا فان كا^{2} دالة إحصائية عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .

الفصل الرابع

الارتباط والانحدار

- أولاً : الارتباط ومعناه .
- ثانياً : أنواع الارتباط .
- ثالثاً : معامل الاقتران .
- رابعاً : معامل فاى .
- خامساً : معامل التوافق .
- سادساً : معامل ارتباط بيرسون .
- سابعاً : معامل ارتباط الرتب لسبيرمان .
- ثامناً : معنى الانحدار .
- تاسعاً : معادلة خط انحدار ص/ س .
- عاشراً : معادلة خط انحدار س/ ص .



الارتباط ومعناه :

تركز عدد من البحوث الاجتماعية على تحليل العلاقة بين أكثر من متغير حيث يهتم الباحث بتحديد كيف وإلى أي مدى يرتبط متغيرات أو أكثر، والإحصاءات المستخدمة في التحليلات ثنائية المتغير، فالمنطق متشابه إلى حد كبير وإن كانت الإحصاءات المستخدمة في دراسة العلاقات متعددة المتغير تتسم بدرجة كبيرة من التعقيد.

وعند تحليل العلاقة بين متغيرين يهتم الباحث بالإجابة عن ثلاثة تساؤلات هل ترتبط هذه المتغيرات ؟ وما هو اتجاه وشكل الارتباط الموجود ؟ هل هناك احتمال أن يكون الارتباط الذي تمت ملاحظته بين حالات العينة أحد خصائص المجتمع البحثي أم أن هذا الارتباط هو نتاج لصغر حجم العينة التي قد تكون غير ممثلة للمجتمع البحثي ؟

يمكن تحديد الارتباط بين متغيرين من خلال استخدام مجموعة من الإحصاءات تعرف باسم معاملات الارتباط ومعامل الارتباط هو رقم يلخص التحسن في تخمين القيم على متغير واحد لأي حالة على أساس معرفة قيم المتغير الثاني، فكلما ارتفع المعامل قوي الارتباط . وتتراوح معاملات الارتباط بين صفر وواحد(أو –١)، وتشير القيم التي تقترب من ١ إلى وجود ارتباط قوي نسبياً أما تلك التي تقترب من صفر فتشير إلى ارتباط ضعيف نسبياً. ويتطلب كل مستوى قياس أنواع مختلفة

من الحسابات وبالتالي فلكل من هذه المستويات اختبارات ارتباط مختلفة.

إضافة إلى حجم الارتباط يهتم الباحث بمعرفة اتجاه العلاقة بين المتغيرين فهل هي علاقة طردية أو عكسية، وتجدر الإشارة هنا إلى أن مفهوم الاتجاه ليس له معنى على مستوى القياس الأسمى، حيث إن الأرقام على هذا المستوى من القياس مجرد عناوين للفئات، وبالتالي لا تتغير إشارات معاملات الارتباط الاسمية فكلها موجبة وتشير إلى مدى قوة الارتباط ، أما على مستوى قياس الفترة فإن الإشارات تتغير ولها دلالات هندسية على درجة عالية نسبياً من التعقيد.

وأخيراً يهتم الباحث باختبارات الدلالة الإحصائية وهي الاختبارات التي توضح احتمال أن تكون العلاقات التي يلاحظها الباحث نتاج التحيز في عملية الاختبار بدلاً من أن تعكس علاقات موجودة فعلاً في مجمع البحث.

أنواع الارتباط :

بالطبع عرفنا أن قيمة معامل الارتباط محصورة فى الفترة المغلقة [-١ ، ١] وتتحدد نوعية الارتباط من الجدول التالى :

قيمة معامل الارتباط	نوع الارتباط
+١	ارتباط طردى تام
من ٠,٧ إلى أقل من +١	ارتباط طردى قوى
من ٠,٤ إلى أقل من ٠,٧	ارتباط طردى متوسط
من صفر إلى أقل من ٠,٤	ارتباط طردى ضعيف
صفر	الارتباط منعدم
-١	ارتباط عكسي تام
من -٠,٧ إلى أقل من -١	ارتباط عكسى قوى
من -٠,٠٤ إلى أقل من -٠,٧	ارتباط عكسى متوسط
من صفر إلى أقل من -٠٤.	ارتباط عكسى ضعيف

طرق حساب الارتباط :

١- معامل الاقتران :

يستخدم معامل الاقتران لحساب قيمة معامل الارتباط عندما يكون المتغيران المراد قياس الارتباط بينهما صفات والجدول المزدوج الذي يمثل العلاقة بينهم مكون من (٤) خلايا فقط دون خلايا المجموع نستخدم القانون التالى لمعامل الاقتران:

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{\text{أ}\times\text{د} - \text{ب}\times\text{جـ}}{\text{أ}\times\text{د} + \text{ب}\times\text{جـ}}$$

حيث أ ، ب ، جـ ، د هم الخلايا الأربع للجدول رباعى الخلايا كما بالشكل :

أ	ب
جـ	د

مثال :

قام أحد الباحثين بعمل بحث عن نسب المدخنيين من النوعين الذكور والإناث فحصل على بيانات الجدول التالى :

النوع / التدخين	ذكور	إناث	مج
يدخن	٢٥	١٥	٤٠
لا يدخن	٥	٥٥	٦٠
مج	٣٠	٧٠	١٠٠

والمطلـوب حسـاب قيمـة معامـل الارتبـاط بالطريقـة المناسـبة مـع بيان نوع هذا الارتباط ؟

<u>الحل</u> :

الجدول مكون من أربعة خلايا فقط والمتغيران صفات لذا نستخدم معامل الاقتران :

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{\text{أ}\times\text{د} - \text{ب}\times\text{جـ}}{\text{أ}\times\text{د} + \text{ب}\times\text{جـ}}$$

$$\text{معامل الاقتران} = \frac{٢٥\times٥٥ - ١٥\times٥}{٢٥\times٥٥ + ١٥\times٥} = \frac{١٣٠٠}{١٤٥٠}$$

معامل الاقتران = ٠,٨٩

<u>تحديد نوع الارتباط :</u>

ارتباط طردي قوى .

٢- معامل فاى :

يستخدم معامل فاى لحساب قيمة معامل الارتباط عندما يكون المتغيران المراد قياس الارتباط بينهما صفات أيضاً والجدول المزدوج الذي يمثل العلاقة بينهم مكون من (٤) خلايا فقط دون خلايا المجموع نستخدم القانون التالى لحساب لمعامل فاى :

$$\text{معامل فاى} = \frac{\text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\sqrt{\text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز} \times \text{ح}}}$$

حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز ، ح

هم خلايا الجدول الرباعى الخلايا كما بالشكل التالى :

النوع / الفكرة	ذكور	إناث	المجموع
مؤيد	أ	ب	ح
معارض	جـ	د	ز
المجموع	هـ	و	ن

والسؤال الآن : متى يستخدم معامل الاقتران ومتى يستخدم معامل فاى رغم التشابه في الشروط ؟

يستخدم معامل فاى إذا كنا نريد استخدام جميع خلايا الجدول أو إذا كنا نريد الحصول على القيمة الأقل لمعامل الارتباط أو الأدق أما بخلاف ذلك نستخدم معمل الاقتران .

<u>مثال</u> :

قام أحد الباحثين بعمل بحث عن نسب المدخنين من النوعين الذكور والإناث فحصل على بيانات الجدول التالى :

النوع / التدخين	ذكور	إناث	مج
يدخن	٢٥	١٥	٤٠
لا يدخن	٥	٥٥	٦٠
مج	٣٠	٧٠	١٠٠

والمطلوب حساب قيمة معامل الارتباط بالطريقة المناسبة للحصول على القيمة الأقل والأدق لمعامل الارتباط مع بيان نوع هذا الارتباط ؟

<u>الحل</u> :

الجدول مكون من أربعة خلايا فقط والمتغيران صفات والمطلوب الحصول على القيمة الأقل والأدق لمعامل الارتباط لذا نستخدم معامل فاى :

معامل فاى = $\frac{\text{أ} \times \text{د} - \text{ب} \times \text{جـ}}{\sqrt{\text{هـ} \times \text{و} \times \text{ز} \times \text{ح}}}$

معامل فاى = $\frac{\text{٢٥} \times \text{٥٥} - \text{١٥} \times \text{٥}}{\sqrt{\text{٣٠} \times \text{٧٠} \times \text{٦٠} \times \text{٤٠}}}$

معامل فاى = $\frac{\text{١٣٠٠}}{\text{٢٢٤٥}}$

معامل فاى = ٠,٥٨

تحديد نوع الارتباط :

ارتباط طردي متوسط .

التعليق :

نلاحظ أن قيمة معامل الاقتران أكبر من قيمة معامل فاى لحساب قيمة الارتباط لنفس المثال حيث أن معامل فاى أدق من معامل الاقتران لأنه يستخدم جميع خلايا الجدول .

٣- **معامل التوافق** :

يستخدم معامل التوافق لحساب قيمة معامل الارتباط عندما يكون المتغيران المراد قياس الارتباط بينهما صفات أيضاً والجدول المزدوج الذي يمثل العلاقة بينهم يزيد عدد خلاياه عن (٤) خلايا دون خلايا المجموع ونستخدم القانون التالى لحساب قيمة معامل التوافق :

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\text{جـ} - ١}{\text{جـ}}}$$

حيث تحسب (جـ) من العلاقة :

$$\text{جـ} = \text{مجـ} \frac{\text{مربع الخلية}}{\text{مجموع صف الخلية} \times \text{مجموع عمود الخلية}}$$

مثال :

قام أحد الباحثين بعمل بحث عن المدخنين ومدى تأثرهم بمشاهدة برنامج خمسة لصحتك فحصل على بيانات الجدول التالى :

التدخين / مشاهدة البرامج	يدخن	لا يدخن	مج
دائماً يشاهد البرنامج	٦٢	١١٦	١٧٨
غالباً يشاهد البرنامج	١٧	١٧٦	١٩٣
أحياناً يشاهد البرنامج	٥	٧٣	٧٨
لا يشاهد البرنامج	٣	٢٠	٢٣
مج	٨٧	٣٨٥	٤٧٢

والمطلوب حساب قيمة معامل الارتباط بالطريقة المناسبة مع بيان نوع هذا الارتباط ؟

الحل :

الجدول تزيد عدد خلاياه عن أربعة خلايا والمتغيران صفات لذا نستخدم معامل التوافق :

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\text{جـ} - ١}{\text{جـ}}}$$

حيث تحسب (جـ) من العلاقة :

$$\text{جـ} = \text{مجـ} \frac{\text{مربع الخلية}}{\text{مجموع صف الخلية} \times \text{مجموع عمود الخلية}}$$

$$\text{جـ} = \frac{(٦٢)^{٢}}{١٧٨ \times ٨٧} + \frac{(١٧)^{٢}}{١٩٣ \times ٨٧} + \frac{(٥)^{٢}}{٧٨ \times ٨٧}$$

$$+ \frac{(٣)^{٢}}{٢٣ \times ٨٧} + \frac{(١١٦)^{٢}}{١٧٨ \times ٣٨٥} + \frac{(١٧٦)^{٢}}{١٩٣ \times ٣٨٥}$$

$$+ \frac{(٧٣)^{٢}}{٧٨ \times ٣٨٥} + \frac{(٢٠)^{٢}}{٢٣ \times ٣٨٥}$$

جـ = ٠,٢٤٨ + ٠,٠١٧ + ٠,٠٠٤ + ٠,٠٠٥ + ٠,١٩٦ +

٠,٤١٧ + ٠,١٧٨ + ٠,٠٤٥ = ١,١١

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{١,١١ - ١}{١,١١}}$$

معامل التوافق = ٠,٣٢

<u>تحديد نوع الارتباط :</u>

ارتباط طردي ضعيف .

٤- معامل ارتباط بيرسون :

يستخدم معامل ارتباط بيرسون لحساب قيمة معامل الارتباط عندما يكون المتغيران المراد قياس الارتباط بينهم متغيرات كمية ويشترط تساوى عدد حالات كلاً من المتغيرين ونستخدم القانون التالى لحساب قيمة معامل ارتباط بيرسون :

ر : هو معامل ارتباط بيرسون ويحسب من العلاقة :

$$ر = \frac{ن\ مجـ (س \times ص) - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}] \times [ن\ مجـ\ ص^{٢} - (مجـ\ ص)^{٢}]}}$$

مثال :

الجدول التالى يوضح درجات مجموعة من الطلاب فى اختبار تم إجراؤه على نفس الطلاب مرتين متتاليتين والمطلوب حساب قيمة معامل الارتباط لبيرسون بين درجات الاختبارين ؟

درجة الاختبار الأول	٣	٥	٩	٨	٢
درجة الاختبار الثاني	٤	٦	٧	٤	٣

الحل :

نفترض أن درجات الاختبار الأول هي "س" ودرجات الاختبار الثاني هي "ص" ثم نكون الجدول التالى :

س	ص	س×ص	$س^٢$	$ص^٢$
٣	٤	١٢	٩	١٦
٥	٦	٣٠	٢٥	٣٦
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
٨	٤	٣٢	٦٤	١٦
٢	٣	٦	٤	٩
٢٧	٢٤	١٤٣	١٨٣	١٢٦

<u>حساب معامل الارتباط لبيرسون :</u>

$$ر = \frac{\text{ن مجـ (س×ص) – مجـ س × مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^٢ - (\text{مجـ س})^٢] \times [\text{ن مجـ ص}^٢ - (\text{مجـ ص})^٢]}}$$

نعوض فى المعادلة السابقة :

$$ر = \frac{٥ \times ١٤٣ - ٢٧ \times ٢٤}{\sqrt{[٥ \times ١٨٣ - (٢٧)^٢] \times [٥ \times ١٢٦ - (٢٤)^٢]}}$$

ر= ٠,٦٦٨

تحديد نوع الارتباط :

ارتباط طردي متوسط .

٥- معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

يستخدم معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لحساب قيمة معامل الارتباط عندما يكون المتغيران المراد قياس الارتباط بينهم متغيرات كمية ويشترط تساوى عدد حالات كلاً من المتغيرين أيضاً ونستخدم القانون التالى لحساب قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان:

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)}$$

حيث :

ر : معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

ف = رتب المتغير الأول – رتب المتغير الثاني

ن : عدد الحالات

مثال :

الجدول التالى يوضح درجات مجموعة من الطلاب فى اختبار تم إجراؤه على نفس الطلاب مرتين متتاليتين والمطلوب حساب قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين درجات الاختبارين ؟

درجة الاختبار الأول	٣	٥	٩	٨	٢
درجة الاختبار الثاني	٤	٦	٧	٤	٣

الحل :

نفتـرض أن درجـات الاختبـار الأول هـي "س" ودرجـات الاختبـار الثاني هي "ص" ثم نكون الجدول التالى :

مع ملاحظـة أنـه إذا تـم ترتيب قيم س تصاعدي لابـد من ترتيب قيم ص تصاعدي والعكس بالعكس .

وهنا سوف نرتب القيم تصاعدي .

مع ملاحظة أنـه إذا تساوى عددان أو أكثر فى القيمـة يأخذ كل منهم متوسط ترتيبهم .

فمـثلاً المتغيـر ص يوجـد بــه رقمــان متســاويان همــا (٤،٤) وترتيبهمـا (٢،٣) إذا يأخذ كل منـهم متوسط الترتيـب (٢+٣)/٢ = ٥/٢ = ٢,٥ .

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
٣	٤	٢	٢,٥	-٠,٥	٠,٢٥
٥	٦	٣	٤	-١	١
٩	٧	٥	٥	٠	٠
٨	٤	٤	٢,٥	١,٥	٢,٢٥
٢	٣	١	١	٠	٠
مج					٣,٥

حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٣,٥}{٥ (٢٥ - ١)}$$

$$ر = ١ - \frac{٢١}{٥ \times ٢٤}$$

$$ر = ١ - ٠,١٧٥ = ٠,٨٢٥$$

<u>تحديد نوع الارتباط :</u>

ارتباط طردي قوى .

معنى الانحدار :

يهدف الانحدار إلى الإفادة من الارتباط فى التنبؤ ، فإذا علمنا معامل ارتباط درجات اختبار الحساب بدرجات اختبار الجبر، وعلمنا درجة أى طالب فى اختبار الحساب فإننا نستطيع أن نتنبأ بدرجته فى الجبر وإذا علمنا درجة أى طالب آخر فى اختبار الجبر فإننا نستطيع أن نتنبأ بدرجته فى الحساب .

وقد سمي هذا المفهوم الإحصائي بالانحدار لأنه ينحدر فى تقديره الدرجات المختلفة نحو المتوسط ولذا تسمى معادلات الانحدار أحياناً بمعادلات خطوط المتوسطات .

حساب الانحدار :

تعتمد معادلات الانحدار معاملات الارتباط وعلى الانحرافات المعيارية وعلى المتوسطات فهى بذلك تستعين بأهم المقاييس الإحصائية فى حسابها لهذا التنبؤ .

أولاً : معادلة خط انحدار ص/س :

تتلخص معادلة خط انحدار ص على س فى الصورة التالية :

$$\text{ص} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}} \left(\text{س} - \text{م}_{\text{س}} \right) + \text{م}_{\text{ص}}$$

حيث :

ر = معامل ارتباط بيرسون ويحسب من العلاقة :

$$ر = \frac{ن \text{ مجـ } (س \times ص) - \text{مجـ } س \times \text{مجـ } ص}{\sqrt{[ن \text{ مجـ } س^{٢} - (\text{مجـ } س)^{٢}] \times [ن \text{ مجـ } ص^{٢} - (\text{مجـ } ص)^{٢}]}}$$

$ع_{ص}$ = الانحراف المعياري لقيم ص ويحسب من العلاقة :

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{\text{مجـ } ح^{٢}_{ص}}{ن}}$$

$ع_{س}$ = الانحراف المعياري لقيم س ويحسب من العلاقة :

$$ع_{س} = \sqrt{\frac{\text{مجـ } ح^{٢}_{س}}{ن}}$$

$م_{س}$ = متوسط قيم المتغير س

$م_{ص}$ = متوسط قيم المتغير ص

مثال :

الجدول التالى يوضح درجات خمس طلاب فى اختبارين الأول س والثاني ص والمطلوب حساب معادلة خط انحدار ص/س ثم حساب قيمة ص عندما س = ١٠ .

الأفراد	أ	ب	ج	د	هـ
س	٢	٣	٧	١٨	٢٠
ص	٥	٧	٦	١٢	١٠

الحل :

حساب معامل ارتباط بيرسون :

نكون الجدول التالى :

س	ص	س × ص	$س^٢$	$ص^٢$
٢	٥	١٠	٤	٢٥
٣	٧	٢١	٩	٤٩
٧	٦	٤٢	٤٩	٣٦
١٨	١٢	٢١٦	٣٢٤	١٤٤
٢٠	١٠	٢٠٠	٤٠٠	١٠٠
٥٠	٤٠	٤٨٩	٧٨٦	٣٥٤

$$ر = \frac{ن\ مجـ (س \times ص) - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}] \times [ن\ مجـ\ ص^{٢} - (مجـ\ ص)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٥ \times ٤٨٩ - ٥٠ \times ٤٠}{\sqrt{[٥ \times ٧٨٦ - (٥٠)^{٢}] \times [٥ \times ٣٥٤ - (٤٠)^{٢}]}}$$

$$ر = ٠,٩$$

<u>**حساب المتوسطات :**</u>

$$م_{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$$

$$م_{ص} = \frac{مجـ\ ص}{ن} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

حساب الانحراف المعياري :

نكون الجدول التالى :

س	ص	ح س	ح^{٢} س	ح ص	ح^{٢} ص
٢	٥	٨-	٦٤	٣-	٩
٣	٧	٧-	٤٩	١-	١
٧	٦	٣-	٩	٢-	٤
١٨	١٢	٨	٦٤	٤	١٦
٢٠	١٠	١٠	١٠٠	٢	٤
			٢٨٦		٣٤

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\text{مج ح}^{٢}_{\text{س}}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٢٨٦}{٥}} = ٧,٥٦$$

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{مج ح}^{٢}_{\text{ص}}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٣٤}{٥}} = ٢,٦١$$

حساب معادلة خط انحدار ص/س :

$$ص = ر \times \frac{ع_{ص}}{ع_{س}} (س - م_{س}) + م_{ص}$$

$$ص = ٠,٩ \times \frac{٢,٦١}{٧,٥٦} (س - ١٠) + ٨$$

ص = ٠,٣١ (س – ١٠) + ٨

ص = ٠,٣١ س – ٣,١ + ٨

معادلة خط انحدار ص/س هى

ص = ٠,٣١ س + ٤,٩

عندما س = ١٠ نستطيع التنبؤ بقيمة ص كالتالى :

ص = ٠,٣١ × ١٠ + ٤,٩ = ٨

ثانياً : معادلة خط انحدار س/ص :

تتلخص معادلة خط انحدار س على ص فى الصورة التالية :

$$س = ر \times \frac{ع_{س}}{ع_{ص}} (ص - م_{ص}) + م_{س}$$

حيث :

ر = معامل ارتباط بيرسون ويحسب من العلاقة :

$$ر = \frac{ن\ مجـ (س \times ص) - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س^{2} - (مجـ\ س)^{2}] \times [ن\ مجـ\ ص^{2} - (مجـ\ ص)^{2}]}}$$

$ع_{ص}$ = الانحراف المعياري لقيم ص ويحسب من العلاقة

$$ع_{ص} = \sqrt{\frac{مجـ\ ح^{2}_{ص}}{ن}}$$

$ع_{س}$ = الانحراف المعياري لقيم س ويحسب من العلاقة

$$ع_{س} = \sqrt{\frac{مجـ\ ح^{2}_{س}}{ن}}$$

$م_{س}$ = متوسط قيم المتغير س

$م_{ص}$ = متوسط قيم المتغير ص

مثال :

الجدول التالى يوضح درجات خمس طلاب فى اختبارين الأول س والثاني ص والمطلوب حساب معادلة خط انحدار س/ص ثم حساب قيمة س عندما س = ٨ .

الأفراد	أ	ب	ج	د	هـ
س	٢	٣	٧	١٨	٢٠
ص	٥	٧	٦	١٢	١٠

الحل :

حساب معامل ارتباط بيرسون :

نكون الجدول التالى :

س	ص	س × ص	$س^2$	$ص^2$
٢	٥	١٠	٤	٢٥
٣	٧	٢١	٩	٤٩
٧	٦	٤٢	٤٩	٣٦
١٨	١٢	٢١٦	٣٢٤	١٤٤
٢٠	١٠	٢٠٠	٤٠٠	١٠٠
٥٠	٤٠	٤٨٩	٧٨٦	٣٥٤

$$ر = \frac{ن\ مجـ (س \times ص) - مجـ\ س \times مجـ\ ص}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س^{2} - (مجـ\ س)^{2}] \times [ن\ مجـ\ ص^{2} - (مجـ\ ص)^{2}]}}$$

$$ر = \frac{٥ \times ٤٨٩ - ٥٠ \times ٤٠}{\sqrt{[٥ \times ٧٨٦ - (٥٠)^{2}] \times [٥ \times ٣٥٤ - (٤٠)^{2}]}}$$

ر= ٠,٩

<u>حساب المتوسطات :</u>

$$م_{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$$

$$م_{ص} = \frac{مجـ\ ص}{ن} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

حساب الانحراف المعياري :

نكون الجدول التالى :

س	ص	ح س	ح² س	ح ص	ح² ص
٢	٥	-٨	٦٤	-٣	٩
٣	٧	-٧	٤٩	-١	١
٧	٦	-٣	٩	-٢	٤
١٨	١٢	٨	٦٤	٤	١٦
٢٠	١٠	١٠	١٠٠	٢	٤
			٢٨٦		٣٤

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ح}^{٢}_{\text{س}}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٢٨٦}{٥}} = ٧,٥٦$$

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ح}^{٢}_{\text{ص}}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٣٤}{٥}} = ٢,٦١$$

حساب معادلة خط انحدار س/ص :

$$\text{س} = \text{ر} \times \frac{\text{ع}_{\text{س}}}{\text{ع}_{\text{ص}}} \; (\text{ص} - \text{م}_{\text{ص}}) + \text{م}_{\text{س}}$$

$$\text{س} = ٠,٩ \times \frac{٧,٥٦}{٢,٦١} (\text{ص} - ٨) + ١٠$$

س = ٢,٦ (ص – ٨) + ١٠

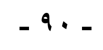
س = ٢,٦ س – ٢٠,٨ + ١٠

معادلة خط انحدار س/ص هي

س = ٢,٦ ص – ١٠,٨

عندما ص = ٨ نستطيع التنبؤ بقيمة س كالتالى :

س = ٢,٦ × ٨ – ١٠,٨ = ١٠



الفصـل الخامس

الاحتمـالات

مقــدمة

كلمة "احتمال" هي كلمة ينطق بها الكثير من الناس، فبعض خبراء الأرصاد الجوية يقولون من المحتمل سقوط أمطار اليوم، احتمال ارتفاع في درجات الحرارة، وبعض خبراء البورصة يقولون احتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة، خلال هذا اليوم، واحتمال نجاح طالب، واحتمال إصابة نوع معين من الفاكهة بنوع من البكتريا، وهكذا، يكثر نطق الأفراد بها وربما يجهلون معناها. فماذا تعني كلمة احتمال؟

يقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية، وغيرها، خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمال، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمال

- **التجربة العشوائية**

هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها، ولكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر أو تحدث، ومثال على ذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية مرة واحدة، فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما: "ظهور الصورة" ويرمز لها بالرمز H، أو "ظهور الكتابة" ويرمز لها بالرمز T، أي أن النتائج الممكنة هي: {H , T}، وقبل إلقاء القطعة ، لا يمكن تحديد أي من النتيجتين سوف تظهر.

- **فراغ العينة**

هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة، ويرمز لها بالرمز S، ويرمز لعدد النتائج المكونة لفراغ العينة بالرمز $n(S)$، ومن الأمثلة على ذلك:

١- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة هو: S:{H , T } ، وعدد النتائج هي: $n(S) = 2$.

٢- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرتين (إلقاء قطعتين مرة واحدة)، فإن فراغ العينة يمكن الحصول عليه من خلال شجرة الاحتمالات كما يلي:

الرمية الأولى | الرمية الثانية | S
H | H | HH
 | T | HT
T | H | TH
 | T | TT

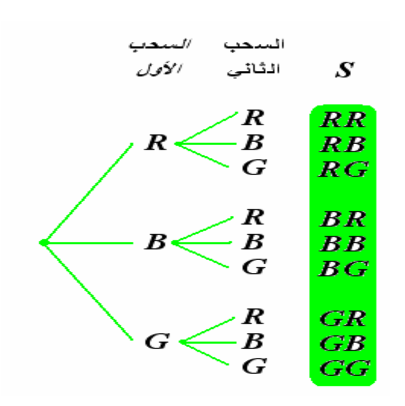
أي أن $n(S) = 4$

١- عند رمي زهرة نرد غير متحيزة مرة واحدة، فإن فراغ العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجه، وهي: S:{1, 2, 3, 4, 5, 6} ، أي أن :

٢- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة عدد من المرات حتى نحصل على الصورة مرة واحدة، نجد أن التجربة هي عدد من المحاولات يتم إيقافها عندما نحصل على الصورة مرة واحدة ، إذا فراغ العينة هو :

S:{H, TH, TTH, TTTH,.......}، ويكون : $n(S) = \infty$.

١- عند سحب كرتين بدون إرجاع من كيس به خمس كرات حمراء (red)، ثلاث كرات زرقاء (blue)، وكرتان خضراء (green)، نجد أن فراغ العينة هو:



أي أن: $n(S) = (10 \times 9) = 90$، (لأنها حالات غير متزنة).

٢- عند فرز صندوق به خمس وحدات من سلعة معينة، يكون فراغ العينة لعدد الوحدات المعيبة هو .... واجب منزلي

- **الحدث *Event***

هو فئة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة، ويرمز للحادث بحرف من الحروف الهجائية [A, B, C,...] ، وينقسم الحادث إلي نوعين هما:

١- حادث بسيط Simple Event: وهو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة.

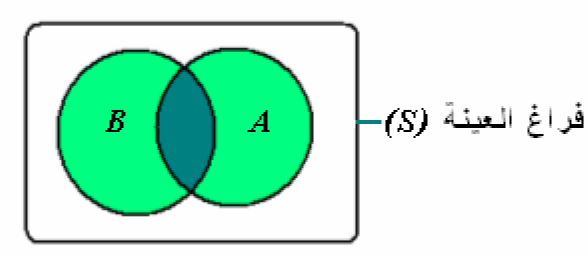
٢- حادث مركب Component Event: ويشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة، أي أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة.

ويرمز لعدد النتائج المكونة للحادث بالرمز $n(A)$, $n(B)$,... وهكذا.

فعند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرتين ، وعرف الحادث A بأنه ظهور الصورة مرتين ، والحادث B ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، نجد أن فراغ العينة في هذه الحالة هي S:{HH, HT, TH, TT} ، وبالنسبة للحادث A فهو حادث بسيط ، يشمل نتيجة واحدة هي A:{HH} ، أي أن n(A)=1 ، أما الحادث B فهو حادث مركب يشمل ثلاث نتائج هي B:{HT, TH, HH} ، أي أن n(B)=3 ، وهذا الحادث يمكن تقسيمه إلى أحداث بسيطة.

- **الاتحاد (∪)**

يعبر اتحاد الحادثان A , B عن وقوع أحدها على الأقل، وبمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A \cup B)$ أو $(A\ or\ B)$، ويمكن الاستعانة بشكل "فن" Ven. Diagram كما يلي:

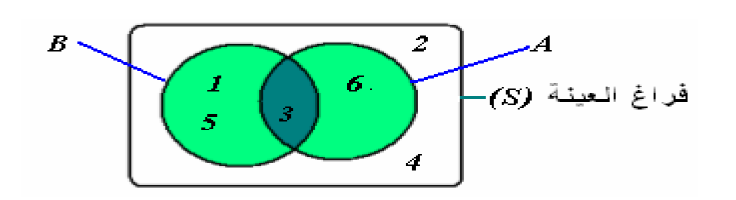


الجزء المظلل يعبر عن الاتحاد $(A \cup B)$

ومثال على ذلك ، عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة ، وعرف الحادث A بأنه ظهور وجه يقبل القسمة على 3 ، والحادث B بأنه ظهور عدد فردي، يلاحظ أن:

S:{1,2,3,4,5,6},   A:{3,6},   B:{1,3,5} ، ويكون اتحاد

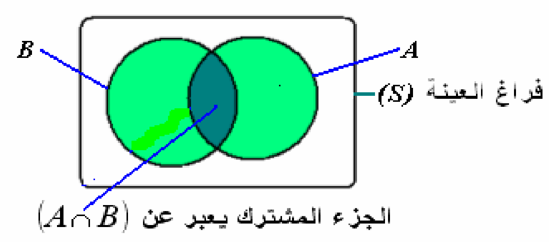
الحادثان A , B هو: $(A \cup B):\{1,3,5,6\}$ ، ويعبر عن ذلك في شكل Ven كما يلي:



$$(A \cup B):\{1,3,5,6\}$$

- **التقاطع** $(\cap)$

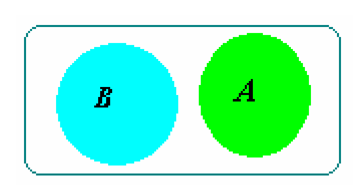
يعبر تقاطع الحادثان A , B عن وقوع الاثنان في آن واحد ، ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A \cap B)$ أو $(A \ and \ B)$ ، ويظهر ذلك في شكل "فن" كما يلي :



ففي المثال السابق ، نجد أن $(A \cap B):\{3\}$.

- **الأحداث المتنافية**

يقال أن الحادثان A ,B متنافيان، إذا كان وقوع أحدها ينفي وقوع الحدث الآخر، بمعنى استحالة وقوعهما في آن واحد، ومن ثم يكون نتيجة تقاطع الحادثان المتنافيان هي الفئة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ أي أن $A \cap B = \phi$ ، ويمكن تمثيلها بشكل " فن " كما يلي:

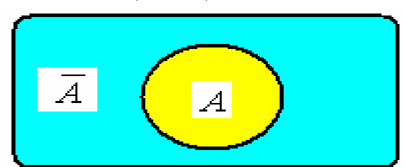


لا توجد نتائج مشتركة $(A \cap B) = \phi$

- **الحدث المكمل**

الحادث المكمل للحادث A هو الذي ينفي وقوعه، بمعنى آخر هو الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحادث A، ويرمز للحادث المكمل بالرمز $\overline{A}$، ومن ثم نستنتج أن : $\left(A \cap \overline{A}\right) = \phi$, $\left(A \cup \overline{A}\right) = S$ كما هو مبين بالشكل التالي:

شكل (٧-٤)



مثال (١)

ألقيت قطعة عملة غير متحيزة ثلاث مرات، وعرفت الأحداث التالية:

الحدث A ظهور الصورة مرتين.

الحدث B ظهور الصورة مرة واحدة.

الحدث C ظهور الصورة في الرمية الأولى.

والمطلوب:

١- إيجاد الأحداث الخاصة بالاتحاد:

$$A \cup B \; , \; A \cup C \; , \; B \cup C \; , \; A \cup B \cup C$$

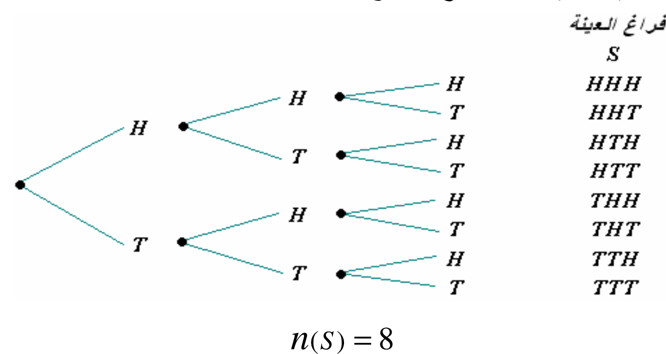
٢- إيجاد الأحداث الخاصة بالتقاطعات:

$A \cap B \ , \ A \cap C \ , \ B \cap C \ , \ A \cap B \cap C$

١- أوجد الحدث $\overline{B}$

الحـل

- فراغ العينة لهذه التجربة هو:



$n(S) = 8$

- وأما الأحداث هي:

A:{HHT,HTH,THH}, B:{HTT,THT,TTH},

C:{HHH,HHT,HTH,HTT}

$n(B) = 3$ $n(C) = 4$

$n(A) = 3$

١- الأحداث الخاصة بالاتحاد:

$(A \cup B) : \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\} \ , \ n(A \cup B) = 6$

$(A \cup C) : \{HHT, HTH, THH, HHH, HTT\} \ , \ n(A \cup C) = 5$

$(B \cup C) : \{HHH, HHT, HTH, HTT, THT, TTH\} \ , \ n(B \cup C) = 6$

$(A \cup B \cup C) : \{HHH, HHT, HTH, HTT, THT, TTH, THH\}, n(A \cup B \cup C) = 7$

٢- الأحداث الخاصة بالتقاطع:

$(A \cap B): \phi \ , \ n(A \cap B) = 0$

$(A \cap C): \{HHT, HTH\} \ , \ n(A \cap C) = 2$

$(B \cap C): \{HTT\} \ , \ n(B \cap C) = 1$

$(A \cap B \cap C): \phi \ , \ n(A \cap B \cap C) = 0$

٣- إيجاد $\overline{B}$:

$(\overline{B}): \{HHH, HHT, HTH, THH, TTT\} \ , \ n(\overline{B}) = 5$

طرق حساب الاحتمالات

يعتمد حساب الاحتمال من الناحية النظرية على أسس وقواعد الرياضيات، ويعتبر هذا النوع من الاحتمال هو العنصر الأساسي في الاستدلال الإحصائي، ولكن في المجال التجريبي تعتمد الاحتمالات على النتائج الفعلية لمشاهدات التجربة، وعلى تكرار الحادث محل الاهتمام، فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحادث *A* بالرمز *P(A)*، فإن طريقة حساب هذا الاحتمال تتحدد وفقا لنوع الاحتمال، وهما نوعان:

- الاحتمال التجريبي Empirical probability: ويعبر عنه بالتكرار النسبي، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{P(A) = \frac{f(A)}{n}}$$

حيث أن: n هو مجموع التكرارات(العدد الكلي للمشاهدات)،
$f(A)$: هو تكرار الحادث A،
فإذا تم إلقاء قطعة عملة غير متحيزة 500 مرة، وتم ملاحظة عدد مرات ظهور كل وجه، ولخصت كالتالي:

الوجه (Face)	H	T	SUM
عدد مرات ظهور الوجه	260	240	500

وإذا كان المطلوب حساب احتمال ظهور الصورة H، يمكن تطبيق المعادلة رقم (٧-١)، والتي تعتمد على التكرار النسبي، أي أن :

$$P(H)=\frac{f(H)}{n}=\frac{260}{500}=0.52$$

- الاحتمال النظري Theoretical Probability: وهو الذي يعتمد في حسابه على أسس وقواعد الرياضيات، والتي تستخدم في تحديد عدد النتائج الممكنة للتجربة، وعدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث، ومن ثم يحسب هذا النوع من الاحتمال ، بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

حيث أن: $n(S)$ هو عدد النتائج الممكنة للتجربة، $n(A)$ هو عدد

النتـائج الممكنـة لوقـوع الحـادث A، فعنـد إلقـاء قطعـة عملـة غيـر متحيزة مرة واحدة ، نجد أن فراغ العينة هو: $S:\{H, T\}$ ، أي أن عدد النتائج الممكنة هي: $n(S)=(2)^1 = 2$، وإذا كان الحادث A هو ظهور صورة ، نجد أن $A:\{H\}$ ، أي أن عدد النتائج المكونة للحادثA هي: $n(A)=1$، ويكون احتمال وقوع الحادث A هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{2}=0.5$$

- العلاقة بين الاحتمال التجريبي و الاحتمال النظري: عند زيادة عـدد المحـاولات n يقتـرب الاحتمـال التجريبـي مـن الاحتمـال النظري، أي أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(A)}{n}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

فعنـد زيـادة عـدد مـرات رمـي قطعـة العملـة، فـإن التكـرار النسبي للصورة سوف يقترب من القيمة (0.5)، وهي قيمة الاحتمال النظري لظهور الصورة عند رمي قطعة العملة مرة واحدة.

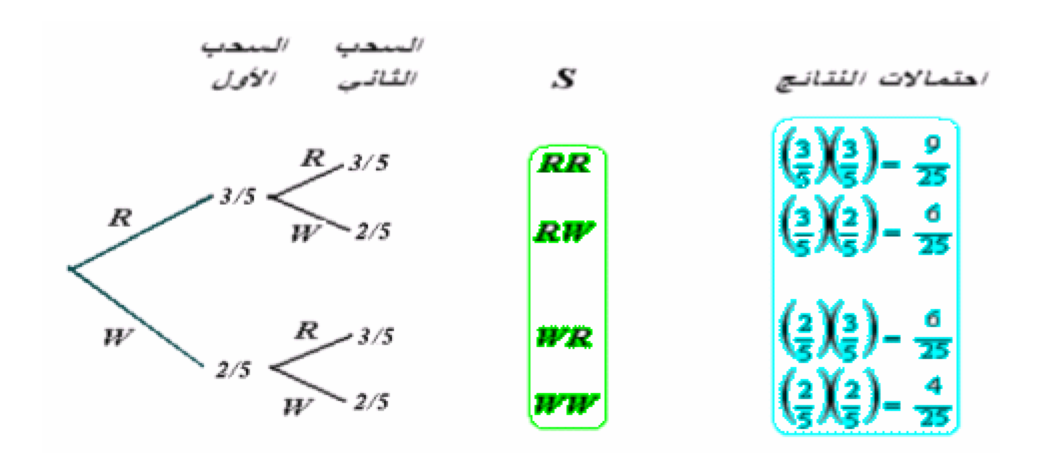
- النتـائج المتشـابهة: إذا أجريـت تجربـة، وكانـت كـل نتيجـة مـن النتـائج الممكنـة للتجربـة لهـا نفس الفرصـة فـي الظـهور، بمعنـى أن كـل نتيجـة لهـا احتمـال هـو $(1/n(S))$، تسـمى هـذه النتـائج بالنتـائج المتماثلـة أو المتشـابهة، فعند إلقـاء زهرة نـرد متزنـة مرة واحـدة، نجد أن فـراغ العينـة هـو $S:\{1,2,3,4,5,6\}$ ، واحتمـال

كل نتيجة هو $(1/6)$ ، وعند إلقاء الزهرة مرتين نجد أن عدد نتائج فراغ العينة هو: $n(S)=6^2=36$ نتيجة، وهي:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

وهذه النتائج متماثلة، واحتمال كل نتيجة هو $(1/36)$.

- النتائج غير المتماثلة: هي النتائج التي تحدث عند تكرار محاولة، بحيث أن احتمالات نتائج كل محاولة غير متساوي، ومن ثم لا تتساوى احتمالات نتائج التجربة، فعند سحب كرتين مع الإرجاع بطريقة عشوائية من كيس به ثلاث كرات حمراء *(R)*، وكرتان تحملان اللون الأبيض *(W)*، نجد أنه في كل سحب يكون احتمال ظهور كرة حمراء هو 3/5 ، واحتمال ظهور كرة بيضاء هو 2/5 ، ومن ثم يكون نتائج فراغ العينة، واحتمال كل نتيجة في حالة سحب كرتين هو:



يلاحظ أن احتمال كل نتيجة يختلف عن $(1/4)$، فهذه الحالات غير متزنة.

بعض قوانين الاحتمالات Probability Laws

هناك بعض القوانين التي يمكن تطبيقها لحساب الاحتمالات المختلفة، وهي:

- قانون جمع الاحتمالات Addition Law

إذا كان لدينا الحادثان A , B ، فإن الاحتمال $P(A\cup B)$ ، يمكن استنتاج معادلته كما يلي:

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}$$

$$=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

إذا:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وفي حالة ثلاث أحداث A , B , C ، يمكن استنتاج معادلة الاتحاد $P(A \cup B \cup C)$ ، وهي:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

وعندما تكون الأحداث متنافية، فإن احتمالات التقاطعات تساوي أصفار، ويكون:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ ,$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

مثال(٢)

عند إلقاء زهرة نرد غير متحيزة مرتين، فأوجد ما يلي:

١- احتمال ظهور وجهين متشابهين.

٢- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10.

٣- احتمال ظهور وجهين متشابهين أو مجموع نقاطهما 10.

٤- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7 أو 10.

الحــل:

نتائج فراغ العينة هي:

	S					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)
		n(S)=36				

١- بفرض أن الحددث A هو حادث ظهور وجهين متشابهين، فإن:

$A:\{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6.6)\},\ n(A)=6$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

٢- بفرض أن الحدث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10، فإن:

$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\},\ n(B)=3$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو :

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

٣-لحساب احتمال ظهور وجهين متشابهين أو (or) مجموع

نقاطهما 10 ، تستخدم المعادلة (٧-٣)، حيث أن:

$$P(A)=\frac{1}{6}\ ,\ P(B)=\frac{1}{12}$$

وأما التقاطع $(A\cap B)$ فيعبر عن ظهور وجهين متشابهين و مجموعهما 10 يمكن حسابه كما يلي:

$$(A\cap B):\{(5,5)\}\ ,\ n(A\cap B)=1$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{1}{36}$$

ومن ثم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

٤- بفرض أن الحادث C هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7، والحادث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10 ، نجد أن:

$$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\}\ ,\ C:\{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)\ (6,1)\}$$

$$n(C)=6 \qquad n(B)=3$$

$$P(B)=3/36 \quad ، \quad P(C)=6/36$$

يلاحظ أن الحادثين C, B حادثين متنافيين، لذا تستخدم المعادلة التالية في حساب الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{3}{36}+\frac{6}{36}$$

$$=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

- قانون الاحتمال الشرطي **Conditional probability**

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث، إذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الإحصاء إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاقتصاد، وكاحتمال استخدام المزرعة لنوع معين من السماد، إذا علم أنه يقوم بزراعة محصول معين، وكاحتمال أن الخريجي يعمل بالقطاع الخاص، إذا علم أنه ممن تخرجوا من قسم معين من أقسام كلية الزراعة، والأمثلة على ذلك كثيرة.

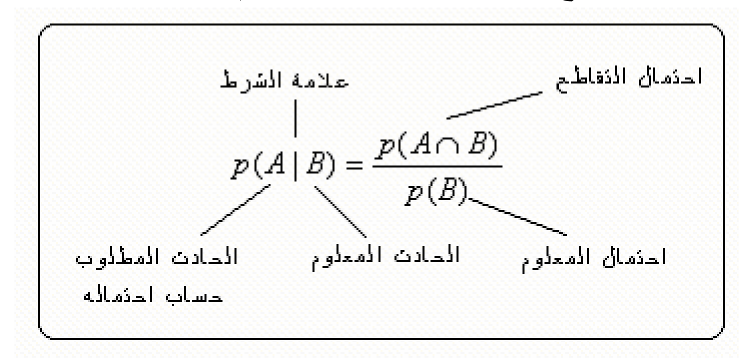
فإذا كان الحادث B حادث معلوم، والحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه، بمعلومية الحادث B، فإن هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

ويعرف الاحتمال $p(A \mid B)$ بقانون الاحتمال الشرطي، ويقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B"، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B"، كما يمكن حساب احتمال وقوع الحادث B بمعلومية الحادث A، وذلك بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

ومن المعادلتين السابقتين يلاحظ أن الاحتمال الشرطي هو نسبة حادث التقاطع بين إلى الحادث المعلوم، حيث أن :



مثـال (٣)

فيما يلي توزيع تكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي الكلية في العامين الماضيين، حسب التخصص، ونوع المهنة:

المهنة / التخصص	عمل حكومي	قطاع خاص	عمل حر	Sum
اقتصاد زراعي	15	5	10	30
علوم أغذية	8	17	10	35
علوم تربة	12	10	13	35
Sum	35	32	33	100

فـإذا اختيـر أحـد الخـريجين بطريقـة عشـوائية، احسـب الاحتمـالات التالية:

١- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم الاقتصاد و يعمل بالقطاع الخاص.

٢- ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم علوم الأغذية.

٣- ما احتمال أن يكون من خريجي قسم علوم الأغذية أو من قسم علوم التربة.

٤- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم عوم الأغذية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا.

الحل:

أولا: نرمز لنوع المهنة بالرمو A، ولنوع التخصص بالرمز B ، كما هو مبين بالجدول التالي:

المهنة / التخصص		عمل حكومي A_1	قطاع خاص A_2	عمل حر A_3	Sum
اقتصاد زراعي	B_1	15	5	10	30
علوم أغذية	B_2	8	17	10	35
علوم تربة	B_3	12	10	13	35
Sum		35	32	33	100

ثانيا: التكرار في كل خلية يعبر عن عدد الخريجين الذين ينتمون لقسم معين و يعملون في مهنة معينة، أي يعبر عن عدد تكرارات حوادث التقاطع الممكنة $A \cap B$.

١- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم الاقتصاد و يعمل بالقطاع الخاص.

$$P(B_1 \cap A_2) = \frac{f(B_1 \cap A_2)}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

٢- حساب احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم علوم الأغذية.

$$P(A_1 \cup B_2) = p(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.62$$

٣- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم علوم الأغذية أو من قسم علوم التربة.

هذان حادثان متنافيان، لأن تخرج الفرد من أحد الأقسام ينفي تخرجه من الأقسام الآخرى، وبمعنى آخر استحالة أن الفرد تخرج من قسمين في آن واحد، لذا يكون احتمال اتحادهما هو:

$$P(B_2 \cup B_3) = p(B_2) + P(B_3)$$
$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = 0.70$$

٤- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم عوم الأغذية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا، هذا احتمال شرطي، المطلوب هنا " حساب احتمال أن الفرد ممن يعملون عملا حرا A_3 بشرط أنه من خريجي قسم علوم أغذية B_2، أي أن الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3 \mid B_2) = \frac{p(A_3 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{35}{100}\right)} = \frac{10}{35}$$

- قانون ضرب الاحتمالات **Probability Multiplying Law**

ويعكس هذا القانون احتمال وقوع الأحداث معا، أي احتمال التقاطعات، فإذا كان A , B ، حادثان يمكن وقوعهما معا، فإن الاحتمال $P(A \cap B)$ يمكن حسابه كحاصل ضرب احتمالين، هما:

$$P(A \cap B) = P(B)\ P(A|B)$$
or
$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|A)$$

مثال (٤)

إذا كانت نسبة مزارع الخضروات التي تستخدم أسلوب معين للتسميد 60%، وإذا كان نسبة المبيعات من إنتاج الخضروات المسمد 70%، بينما نسبة المبيعات من الخضروات غير المسمدة 80%، إذا اختيرت أحد المزارع التي تنتج الخضروات عشوائيا ، فأوجد الآتي:

١. ما احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد؟
٢. إذا علم أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد، ما احتمال أن تبيع إنتاجها؟
٣. ما احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها؟
٤. ما احتمال أن هذه المزرعة ممن لا يستخدمون أسلوب التسميد و تبيع إنتاجها؟

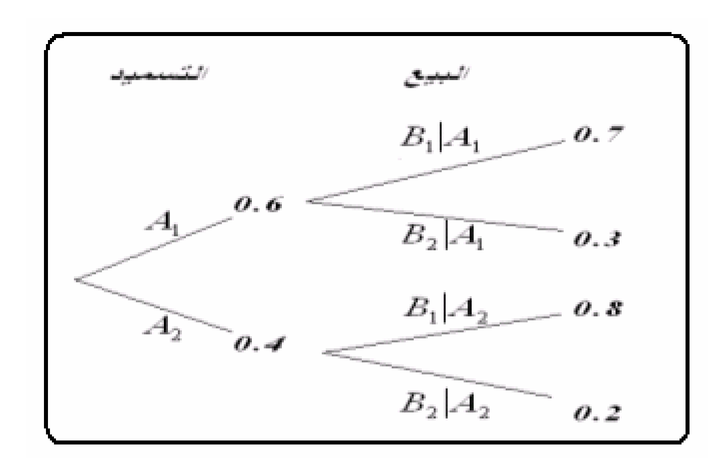
الحـل

إذا فحصـنا حـال المزرعـة المسـحوبة، نجـد أننـا نتعامـل مـع نتيجتين متعاقبتين هما:

النتيجة الأولي ولها حالتان: {المزرعة تستخدم طريقة التسميد *(A_1)* أو المزرعة لا تستخدم *(A_2)* }

النتيجـة الثانيـة ولهـا حالتـان: { المزرعـة تبيـع الإنتـاج *(B_1)*، أو المزرعة لا تبيع الإنتاج *(B_2)* }

لـذا يمكـن اسـتنتاج شـجرة الاحتمـالات للحصـول علـى النتـائج الكلية كالتالي:



وفيما يلي حساب الاحتمالات:

١. احتمال أن المزرعة تستخدم أسلوب التسميد هو:

$$P(A_1) = 0.6$$

٢. إذا علم أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد، فإن احتمال أن تبيع إنتاجها هو:

$$P(B_1|A_1) = 0.7$$

٣. احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها عبارة عن احتمال وقوع حادثتان معا $(B_1 \text{ and } A_1)$، لذا يحسب هذا الاحتمال بتطبيق المعادلة (٧-٨) كما يلي:

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)\ \ P(B_1|A_1)$$
$$= (0.6)(0.7) = 0.42$$

٤. احتمال أن المزرعة لا تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها هو:

$$P(A_2 \cap B_1) = P(A_2)\ \ P(B_1|A_2)$$
$$= (0.4)(0.8) = 0.32$$

- **الأحداث المستقلة Independent Events**

إذا كانت الحادثتان A , B يمكن وقوعهما معا، ولكن وقوع أحدهما ليس له علاقة بوقوع أو عدم وقوع الحادث الآخر، فإن الاحتمال $P(A \cap B)$ يمكن التعبير عنه كالتالي:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\ \ P(B)}$$

وفي هذه الحالة يقال أن الحاثتان A , B مستقلتان.

مثـال(٥)

إذا كان نسبة المزارع التي تنتج خضروات 60% ، ونسبة المزارع التي تنتج فاكهه 75%، ونسبة المزارع التي تنتج الخضروات و الفاكهة 50%، أوجد الآتي:

١. ما احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات؟

٢. ما احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة ؟

٣. هل انتاج المزرعة للفاكهة مستقل عن إنتاجها للخضروات؟

الحل:

بفرض أن A حادث يعبر عن "المزرعة تنتج خضروات "، B هو حادث يعبر عن " المزرعة تنتج فاكهة"، فإن:

$$P(A) = 0.6 \ , \ P(B) = 0.75 \ , \ P(A \cap B) = 0.5$$

ويكون:

١. احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= (0.6) + (0.75) - 0.5 = 0.85$$

٢. احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة هو:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.75 = 0.25$$

٣. لمعرفة ما إذا كان إنتاج المزرعة للفاكهة مستقل عن إنتاجها للخضروات يمكن تطبيق المعادلة :

$$P(A \cap B) = 0.5 \ , \ P(A) \ P(B) = (0.6)(0.75) = 0.45$$

وحيث أن : $P(A \cap B) \neq P(A) \ P(B)$ ، فإن إنتاج المزرعة للفاكهة *(A)*، غير مستقل عن إنتاجها للخضروات *(B)*.

مثـال(٦)

إذا كـان الحادثـان A , B حادثـان مسـتقلان ، وكـان $P(A)=0.6$ ، $P(B)=0.5$ ، فأوجد الاحتمال $P(A\cup B)$.

الحـل:

بما أن الحادثان A ,B مستقلان، إذا:

$$P(A\cap B)=P(A)\ P(B)$$
$$=(0.6)(0.5)=0.3$$

ويكون احتمال $P(A\cup B)$ هو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=0.6+0.5-0.3=0.8$$

الفصل السادس

اختبارات الفروض



مقدمة:

المقصود بالفروض هنا الفروض الإحصائية بمعنى الفروض التي تتعلق بالمجتمع الإحصائي المسحوبة منه العينة، أو توزيع هذا المجتمع أو معالمه كالوسط الحسابي أو النسبة في المجتمع.

والفرض ما هو إلا تخمين أو استنتاج ذكي مبني على حيثيات معقولة أو منطقية ولكنه ليس مبنياً على حسابات دقيقة خاصة بالمجتمع لأننا نفترض أنه لا يمكن دراسة المجتمع بالكامل عن طريق الحصر الشامل بل نحاول استنتاج أو الاستدلال على مقاييس المجتمع باستخدام بيانات ونتائج العينة.

فمثلاً : قد يفترض الباحث أن متوسط الدخل الشهري للفرد في دولة ما هو 200 دولار (بناءً على ما يراه من مستوى المعيشة في هذا البلد وأوضاعه الاقتصادية)، ويحتاج إلى اختبار علمي (إحصائي) لمعرفة مدى صحة هذا الفرض أو قد يفترض باحث آخر أن نسبة الناخبين في إحدى الدوائر الذين يؤيدون مرشحاً معيناً لا تقل عن % 30 وهكذا... والمطلوب هو اختيار مدى صحة هذه الفروض. أي أن يصل الباحث إلى قرار إما بقبول الفرض أو عدم قبوله (أي رفضه) وذلك باحتمال معين. وقبل تناول كيفية إجراء الاختبارات الإحصائية نستعرض أولاً بعض المفاهيم والتعريفات الأساسية اللازمة لهذا الموضوع حتى تكون الصورة أكثر وضوحاً..

الفرض العدمي (أو الصفري) The Null Hypothesis

الفرض العدمي هو "الفرض الأساسي المراد اختباره". ويرمز له عادة بالرمز :Ho. هذا الفرض يأخذ – عادة – شكل معادلة أو مساواة. فمثلاً إذا كان الفرض العدمي المراد اختباره هو أن متوسط دخل الفرد في إحدى المناطق هو 200 دولار شهرياً فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$Ho : \mu = 200$$

ويقرأ بالشكل التالي :

الفرض العدمي هو : أن متوسط دخل الفرد في المنطقة هو 200 دولاراً شهرياً.

وكمثال آخر : إذا كان الفرض المراد اختباره هو أن نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين بين عمال أحد المصانع هي % 30، فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$Ho : P = 0.30$$

ويقرأ بالشكل التالي :

الفرض العدمي هو : أن نسبة المؤيدين للبرنامج الاقتصادي بين عمال المصنع هي 0.30 .

وليس شرطاً أن يصاغ الفرض العدمي بالرموز، فقد يتم التعبير عنه بدون رموز. فقد يريد الباحث أن يختبر ما إذا كانت هناك علاقة بين الأمية والاستعداد للانحراف، أو بين المؤهل العلمي ودرجة الوعي السياسي. فقد يصيغ الباحث الفرض العدمي بالشكل التالي (على سبيل المثال) :

الأمية والاستعداد للانحراف مستقلان

(أي لا توجد علاقة بينهما، أو أن العلاقة بينهما منعدمة).

الفرض البديل : The Alternative Hypothesis

في اختبارات الفروض يتحتم وضع فرض آخر غير الفرض العدمي المراد اختباره يسمى الفرض البديل. وهذا الفرض " هو الذي سيقبل في حالة رفض الفرض العدمي " أي لابد من تحديد فرض آخر بديل في الوقت الذي نحدد فيه الفرض العدمي، وبالتالي فإن الفرض البديل يعرف كما يلي :

"الفرض البديل هو الفرض الآخر الذي سيقبل في حالة رفض الفرض العدمي" ويرمز له عادة بالرمز : H1

والفرض البديل له أهمية كبيرة وبالذات في قياس الظواهر الاجتماعية – كما سوف نرى – فهو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم لذلك فهو يأخذ أحد أشكال ثلاثة هي :

أ- أن يأخذ شكل " لا يساوي ". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى : اختبار الطرفين

فمثلاً : إذا كان الفرض العدمي هو أن متوسط الدخل الشهري لفئة معينة في المجتمع هو 200 دولار.

$$Ho : \mu = 200$$

فإن الفرض البديل في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي :

$$H1 : \mu \neq 200$$

بمعنى أن متوسط دخل هذه الفئة من المجتمع " لا يساوي " 200 دولار شهرياً.

ب- أو أن يأخذ شكل " أكبر من ". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى " اختبار الطرف الأيمن ".

فمثلاً : قد يكون الفرض البديل كما يلي :

$$H1 : \mu > 200$$

أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أكبر من 200 دولار شهرياً.

ج- وأخيراً قد يأخذ الفرض البديل شكل " أقل من ".وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى " اختبار الطرف الأيسر" *.

فمثلاً : قد يكون الفرض البديل هو :

$$H1 : \mu < 200$$

أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أقل من 200 دولاراً شهرياً.

والخلاصة هي لابد للباحث من تحديد الفرض البديل الذي لا يخرج عن أحد الأشكال الثلاثة السابقة، وهذا التحديد مهم جداً قبل الدخول في تفاصيل

الاختبار الإحصائي وذلك لأنه هو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم كما سوف نرى.

الخطأ في اتخاذ القرار :

ففي حالة قبول الباحث لفرضه العدمي، فلا مجال للبحث في الفرض البديل، أما في حالة حدوث العكس بمعنى رفض الفرض العدمي فإنه يتحتم في هذه الحالة قبول الفرض البديل، على أنه من الجدير بالذكر أن الباحث هنا عرضة للوقوع في الخطأ عند اتخاذ قراره بقبول الفرض العدمي أو رفضه، فقد يرفض فرضاً هو في الواقع صحيح، وقد يقبل فرضا هو في الواقع غير صحيح. لذلك فقد تم تصنيف هذه الأخطاء إلى نوعين هما :

الخطأ من النوع الأول : Type I error

الخطأ من النوع الأول هو "رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح ". أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي في الواقع صحيح وكان من الواجب قبوله فقد تم أخذ قرار خاطئ برفضه. وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الأول هو : " رفض فرض صحيح".

الخطأ من النوع الثاني : Type II error

وفي المقابل فإن الخطأ من النوع الثاني يعني " قبول الفرض العدمي بينما هو خاطئ " أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي خاطئ وكان من الواجب رفضه فقد تم أخذ قرار خاطئ بقبوله وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الثاني هو " قبول فرض خاطئ ".

وقد يتساءل البعض عند مدى إمكانية تصغير الخطأين معاً ولكن لسوء الحظ لا يمكن تصغيرهما معاً إلى أدنى حد ممكن، ويبدو أن الطريقة الوحيد ة المتاحة لذلك هي زيادة (أو تكبير) حجم العينة، الأمر الذي قد لا يكون ممكنا في كل الحالات. لذلك فإن الذي يحدث عادة هو تثبيت أحدهما

كأن يكون نسبة أو احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول ومحاولة تصغير الآخر.

مستوى المعنوية : Level of Significance

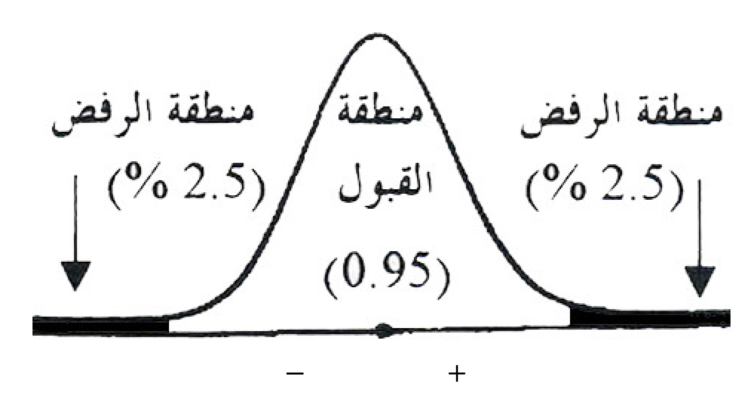
يعتبر مصطلح " مستوى المعنوية " واحدا من أهم المصطلحات المستخدمة في دراسة نظرية اختبارات الفروض. والمقصود بمستوى المعنوية هو " احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول ". أو نسبة حدوثه " أي احتمال رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح ".

وعادة ما يرمز إلى مستوى المعنوية بالرمز اللاتيني ألفا α وأشهر قيمتين لمستوى المعنوية هما 5%، 1 %، ولكن ليس هناك ما يمنع من أن يأخذ قيما أخرى.

ومن الملاحظات المهمة هنا هو أن " مستوى المعنوية " والذي يسمى أحياناً " مستوى الدلالة " هو المكمل لدرجة الثقة " بمعنى أن مجموعهما يساوي 100% أو واحد صحيح. فإذا كانت درجة الثقة 95% فإن مستوى المعنوية يساوي 5%. والعكس صحيح فإذا كان مستوى المعنوية 5% فإن هذا يعني أن درجة الثقة 95 %. ولعل من أهم الملاحظات هنا هو استخدام تعبير "مستوى المعنوية" في حالات اختبارات الفروض، بينما يستخدم مصطلح "درجة أو مستوى الثقة" في حالات التقدير.

والفكرة الأساسية في اختبار الفرض هي تقسيم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين: أحداهما تسمى " منطقة القبول " أي منطقة قبول الفرض العدمي. والأخرى تسمى " منطقة الرفض"، أي منطقة رفض الفرض العدمي والتي تسمى أحيانا " بالمنطقة الحرجة Critical region ". والنقطة الجديرة بالملاحظة هنا هي أن منطقة القبول تمثل درجة الثقة، بينما تمثل منطقة الرفض مستوى المعنوية. وهناك ثلاث حالات مختلفة لمنطقتي القبول والرفض هي :

الأولى : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل " لا يساوي " كأن يكون الفرض في هذه الحالة هو أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 200 دولاراً فإن منطقة الرفض تكون موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي، ويسمى الاختبار في هذه الحالة " اختبار الطرفين "، والذي يأخذ الشكل التالي (بافتراض أن $\alpha = 5\%$) :

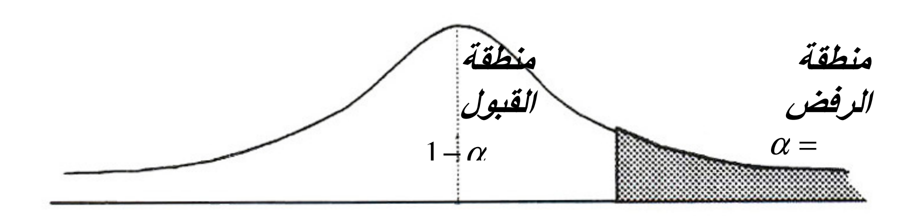


اختبار الطرفين

فالفرض العدمي هنا $Ho : \mu = 200$ يعني أن متوسط دخل الفرد يساوي 200 دولار شهريا، والفرض البديل في هذه الحالة هو $HI : \mu \neq 200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 200 دولار شهرياً. حيث تمثل المنطقة البيضاء غير المظللة منطقة القبول والتي قد تساوي 95% وبالتالي فمنطقة الرفض مقسمة بالتساوي على طرفي المنحنى في هذه الحالة تكون قيمة كل منهما % 2.5.

والنتيجة هو أن القرار أيا كان نوعه سيكون بمستوى معنوية % 5 بمعنى أن احتمال أو نسبة الخطأ فيه من النوع الأول تساوي % 5.

الثانية : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل "أكبر من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيمن للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الأيمن. والذي يأخذ الشكل التالي أدناه :



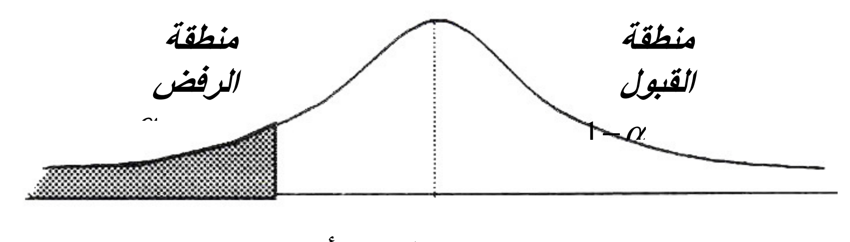
اختبار الطرف الأيمن

فالفرض العدمي هنا نفس فرض المثال السابق، بينما الفرض البديل هو

$HI : \mu > 200$

بمعنى أن متوسط دخل الفرد أكبر من 200 دولاراً شهرياً. وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلاً 5% مركز في الطرف الأيمن من المنحنى.

الثالثة : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل " أقل من " فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيسر للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الأيسر. والشكل التالي يوضح ذلك :



اختبار الطرف الأيسر

مع افتراض ثبات الفرض العدمي كما في المثال السابق، بينما الفرض البديل هو $HI : \mu < 200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أقل من 200 دولار شهرياً، وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلاً % 5 مركز في الطرف الأيسر من المنحنى.

وسوف نتناول فيما يلي خطوات الاختبار الإحصائي بشيء من التفصيل.

خطوات الاختبار الإحصائي :

يمكن تلخيص خطوات الاختبار الإحصائي في خمس خطوات كما يلي :

١) وضع الفرض العدمي Ho، والذي يأخذ – عادة – شكل " يساوي " فمثلاً إذا كان المطلوب هو اختبار ما إذا كان متوسط عمر الناخب هو 20 سنة فإن هذا الفرض يصاغ كما يلي :

$$Ho : \mu = 20$$

٢) وضع الفرض البديل H1، والذي يأخذ أحد أشكال ثلاثة إما :

" لا يساوي "

أو " أكبر من "

أو " أقل من "

وبالرموز فإن الفرض البديل قد يأخذ شكل أحد الصيغ التالية :

$$H1 : \mu \neq 20$$

$$OR \mu > 20$$

$$OR \mu < 20$$

والذي يحدد شكل الفرض البديل هو مدى اقتناع الباحث بذلك أو مدى توفر المعلومات الأولية، فمثلاً إذا كانت وجهة نظر الباحث أن متوسط عمر الناخب لا يمكن أن يقل عن 20 سنة فإنه يختار الفرض البديل "

أكبر من " والعكس صحيح إذا كان يعتقد أن متوسط عمر الناخب لا يزيد عن 20 سنة فإنه يختار الفرض البديل " أقل من " أما إذا لم يكن لديه أي تصور أو أي معلومات فإنه يختار الفرض البديل " لا يساوي ".

٣) إحصائية الاختبار : وهي الإحصائية التي يتم حسابها من بيانات العينة بافتراض أن الفرض العدمي صحيح. ويتوقف شكل الإحصائية على العوامل التالية :

أ- توزيع المجتمع، وهل هو طبيعي أم لا، وهل تباينه معروف أم لا.

ب- وحجم العينة، وهل هو كبير أم صغير.

جـ- والفرض العدمي المراد اختباره وهل هو عن الوسط أو النسبة أو التباين أو الارتباط... الخ.

والفكرة الأساسية (غالباً) في إحصائية الاختبار هي : حساب الفرق بين قيمة المعلمة التي نفترضها للمجتمع (في الفرض العدمي) والقيمة المقابلة لها في العينة أي التابع الإحصائي، ثم نقسم (أو ننسب) هذا الفرق إلى الخطأ المعياري للتابع الإحصائي. فمثلاً: إذا كان الاختبار عن الوسط الحسابي فإنه يتم حساب الفرق بين قيمة الوسط الحسابي للمجتمع التي نفترضها وقيمة الوسط الحسابي للعينة، ثم نقسم هذا الفرق على الخطأ المعياري للوسط. وهكذا مع باقي الإحصائيات. فلو أراد الباحث اختبار فرضية أن متوسط عمر الناخب في دولة ما هو مثلاً 30 سنة ولاختبار مدى صحة هذه الفرضية فإنه عادة ما تسحب عينة عشوائية من المجتمع، ولنفرض أن متوسط عمر الناخب في هذه العينة كان 31 سنة، فالفرق هنا هو سنة واحدة وهو فرق صغير بين الافتراض والعينة الحقيقية فالباحث عادة ما يميل إلى قبول فرضه العدمي.

أما إذا كان متوسط عمر الناخب في العينة مثلاً هو 45 سنة، فالفرق هنا كبير بين الفرض والعينة، ولذا فإن احتمال رفض الفرض العدمي هو احتمال كبير نظراً لكبر الفرق بين قيمة الفرض وقيمة العينة. من هنا نستطيع القول بأن إحصائية الاختبار تعتمد على حساب الفرق بين قيمة الوسط المفترض وقيمة متوسط العينة.

هنا قد يثور تساؤل عن المعيار الذي يستطيع من خلاله الباحث الحكم على هذا الفرق ومدى كبره أو صغره. والإجابة الإحصائية عليه تتم من خلال قسمة هذا الفرق على الخطأ المعياري للوسط، ثم مقارنة خارج القسمة بالقيمة الجدولية أو ما يسمى بحدود منطقتي القبول والرفض كما سوف نرى لاحقاً.

وفيما يلي صيغ الإحصائية لاختبارات الوسط الحسابي للعينات الكبيرة والصغيرة وكذلك للنسبة، ثم نستكمل بعدها خطوات الاختبار الإحصائي.

الإحصائية في حالة اختبار الوسط الحسابي :

أ) بافتراض أن المجتمع الإحصائي المسحوبة منه العينة هو مجتمع طبيعي وانحرافه المعياري σ معروف، (أو) أن العينة كبيرة بدرجة كافية فإن إحصائية الاختبار والتي نرمز لها بالرمز $Z_{\overline{X}}$ تأخذ الشكل التالي :

الإحصائية في حالة اختبار الوسط للعينات الكبيرة

$$Z_{\overline{X}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

لاحظ أن البسط هو الفرق بين متوسطي المجتمع والعينة، والمقام هو الخطأ المعياري للوسط. ومن الناحية العملية فإن الانحراف المعياري للمجتمع عادة ما يكون غير معروف ولكن طالما أن العينة كبيرة بدرجة كافية فإنه يمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة S بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع σ.

ب) أما في حالة العينات الصغيرة وذلك عندما يكون المجتمع طبيعياً وانحرافه المعياري غير معروف فإن الإحصائية تأخذ الشكل التالي :

الإحصائية في حالة اختبار الوسط للعينات الصغيرة

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

والتي لها توزيع t بدرجات حرية $n - 1$

الإحصائية في حالة اختبار النسبة :

إذا كانت العينة كبيرة فإن إحصائية الاختبار تأخذ الشكل التالي :

الإحصائية في حالة اختبار النسبة

$$Z_{\hat{P}} = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

والتي لها توزيع طبيعي معياري حيث $\hat{P}$ هي النسبة للعينة، P هي النسبة للمجتمع.

لاحظ أن البسط هو الفرق بين نسبتي المجتمع والعينة والمقام هو الخطأ المعياري للنسبة.

٤) والخطوة الرابعة في الاختبار هي تحديد منطقتي القبول والرفض وذلك بناءً على الجداول الإحصائية والتي تعتمد على:

أ- توزيع المعاينة (وهل هو طبيعي أو t أو...)

ب- والفرض البديل (وهل هو لا يساوي أو أكبر من أو أقل من أي هل يستخدم اختبار الطرفين أو الطرف الأيمن أو الأيسر).

ج- ومستوى المعنوية (وهل هو 1% أو 5% أو غير ذلك).

٥) المقارنة والقرار : بمعنى أن نقارن قيمة الإحصائية (المحسوبة من الخطوة الثالثة) بحدود منطقتي القبول والرفض (والتي حددناها في الخطوة الرابعة). فإذا وقعت قيمة الإحصائية داخل منطقة القبول فإن القرار هو : قبول الفرض العدمي. أما إذا وقعت قيمة الإحصائية في منطقة الرفض فإن القرار هو رفض الفرض العدمي، وفي هذه الحالة نقبل الفرض البديل. مع ملاحظة أن القرار مرتبط بمستوى المعنوية المحدد. بمعنى أن القرار قد يتغير إذا تغير مستوى المعنوية المستخدم (وفي بعض الحالات قد لا يتغير القرار، فهذا يتوقف على قيمة الإحصائية وما إذا كانت تقع في منطقة القبول أو منطقة الرفض).

مما سبق يمكن تلخيص خطوات الاختبار الإحصائي فيما يلي :

١. الفرض العدمي.
٢. الفرض البديل.
٣. الإحصائية.
٤. حدود منطقتي القبول والرفض.
٥. المقارنة والقرار.

ولتوضيح ما سبق نسوق المثال التالي :

مثال (١) : عينة عشوائية حجمها 49 شخصاً اختيرت من أفراد دولة ما، فإذا كان الوسط الحسابي لدخول الأفراد الأسبوعية في العينة هو 75 دولاراً. كيف يمكن اختبار الفرض العدمي بأن متوسط الدخل الأسبوعي لمواطني هذه الدولة يساوي 72 دولاراً مقابل الفرض البديل أنه لا يساوي 72 وذلك بمستوى معنوية % 5 إذا علمت أن الانحراف المعياري لدخول الأفراد يساوي 14 دولاراً.

الحل :

١- الفرض العدمي : هو أن متوسط المجتمع يساوي 72 وبالرموز :

$$Ho : \mu = 72$$

٢- الفرض البديل : هو أن المتوسط لا يساوي 72 وبالرموز :

$$HI : \mu \neq 72$$

٣- الإحصائية : بما أن العينة كبيرة فإن الإحصائية في حالة اختبار الوسط تأخذ الشكل التالي :

$$Z_{\overline{X}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

حيث $n = 49, \sigma = 14, \overline{X} = 75, \mu = 72$

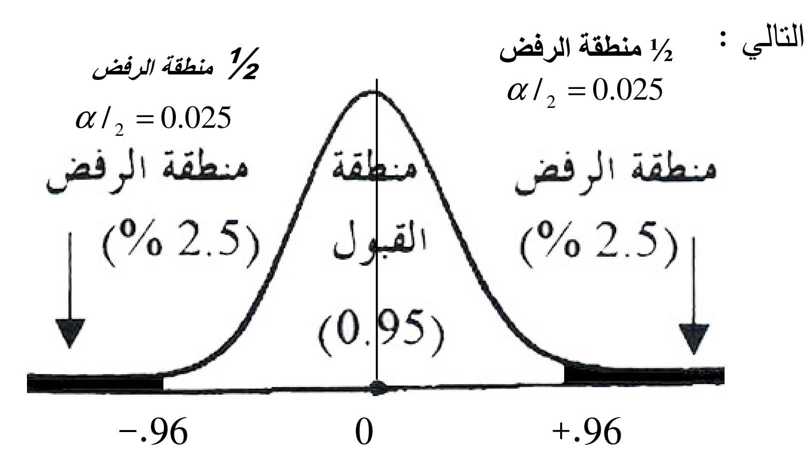
وبالتعويض نحصل على :

$$Z_{\overline{X}} = \frac{75 - 72}{\frac{14}{\sqrt{49}}}$$

$$Z_{\overline{X}} = \frac{3}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

أي أن قيمة الإحصائية تساوي 1.5

٤- حدود منطقتي القبول والرفض : نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري حيث مستوى المعنوية 5% وبما أن الفرض البديل هو :" لا يساوي " فإن ما يستخدم في هذه الحالة هو اختبار الطرفين كما في الشكل التالي :

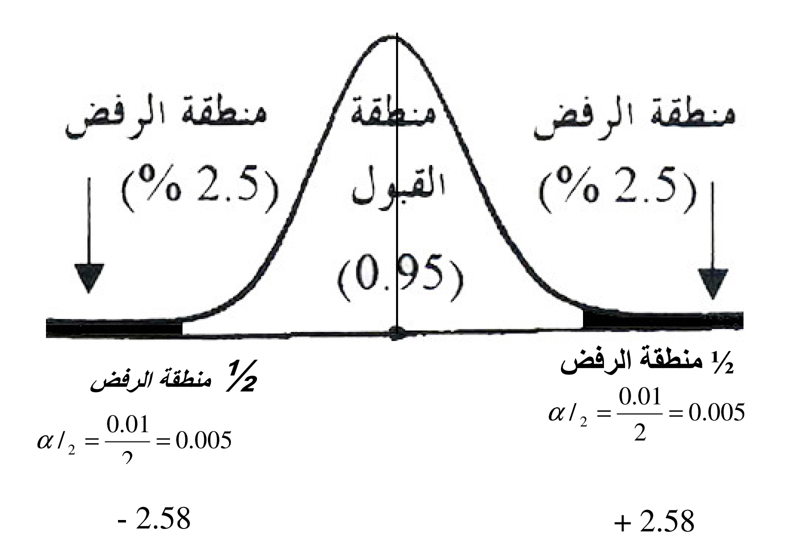


وقد حصلنا على حدود منطقتي القبول والرفض وذلك بقسمة درجة الثقة (المكملة لمستوى المعنوية) والتي تساوي 0.95 على 2 فنحصل على 0.4750 وبالكشف في جدول التوزيع الطبيعي المعياري عن Z التي تقابل المساحة 0.4750 نجد أنها تساوي 1.96 وحيث أنها موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي فنضع إشارة موجبة في النصف الأيمن، وإشارة سالبة في النصف الأيسر، أي أن منطقة القبول تبدأ من القيمة ١,٩٦- وتستمر حتى القيمة ١,٩٦ + (أي أن أي قيمة محصورة بين هاتين القيمتين تكون في منطقة القبول، وأي قيمة خارج هذه الحدود تكون في منطقة الرفض).

٥- المقارنة والقرار : وبمقارنة قيمة الإحصائية المحسوبة من الخطوة رقم 3 (والتي تساوي 1.5) بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 4) نجد أنها تقع في منطقة القبول لذلك فإن القرار هو :

قبول الفرض العدمي بأن متوسط دخول الأفراد الأسبوعية في هذه الدولة يساوي 72 دولاراً وذلك بمستوى معنوية % 5.

ملاحظة :



لو استخدمنا مستوى معنوية 1% بدلاً من 5% كما في المثال أعلاه فإن حدود منطقتي القبول والرفض تصبح كما يلي :

ومقارنة قيمة الإحصائية 1.5 بحدود منطقتي القبول والرفض نجد أنها تقع في منطقة القبول أي أن القرار هو نفسه قبول الفرض العدمي ولن يتغير بل يتأكد باستخدام مستوى معنوية 1%.

مثال (٢) : يدّعِي أحد المرشحين في الانتخابات أنه سيحصل على نسبة 70% من أصوات الناخبين عندما تجري الانتخابات. ولاختبار هذا الادعاء تم اختيار عينة عشوائية من الناخبين حجمها 100 ناخب، ووجد أن نسبة من يؤيدون المرشح في العينة هي % 60 اختبر مدى صحة ادعاء المرشح بأن النسبة في المجتمع هي % 70 مقابل الفرض البديل أن النسبة أقل من 70% وذلك بمستوى معنوية % 5.

الحل :

١. الفرض العدمي هو أن النسبة في المجتمع (نسبة من يؤيدون المرشح في المجتمع) هي 0.70 أي أن الفرض العدمي هو أن الادعاء صحيح وأن المرشح سيحصل على النسبة التي ادعاها وهي % 70 بالرموز

$HO : P = 0.70$

٢. الفرض البديل والمنطقي : في هذه الحالة هو أن النسبة في المجتمع أقل من هذا الادعاء وبالرموز :

$$HI : P < 0.70$$

٣. الإحصائية : وتأخذ الإحصائية في حالة اختبار النسبة الشكل التالي:

$$Z_{\hat{P}} = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

حيث

$$n = 100, \hat{P} = 0.60, P = 0.70، 1 - p = 1 - 0.70 = 0.30$$

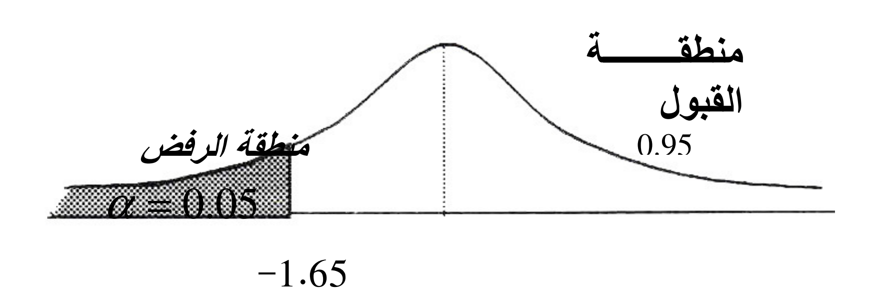
$$Z_{\hat{P}} = \frac{0.60 - 0.70}{\sqrt{\frac{0.70 \times 0.30}{100}}}$$

$$= \frac{-0.10}{0.046}$$

$$Z_{\hat{P}} = -2.17$$

أي أن قيمة الإحصائية تساوي 2.17 −

٤. حدود منطقتي القبول والرفض نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري، حيث مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ وبما أن الفرض البديل هو " أقل من " فنستخدم اختبار الطرف الأيسر.



أي أن منطقة القبول تشمل النصف الموجب (اليمين) من المنحنى وحتى القيمة السالبة $1.65-$ وبالتالي فإن منطقة الرفض تشمل القيم التي أقل من $1.65-$ وقد حصلنا على هذا الرقم من جدول Z حيث تتركز منطقة الرفض والتي تساوي 0.05 في الطرف الأيسر للمنحنى. فنقوم بطرح هذه المنطقة (أو المساحة) من (نصف مساحة المنحنى) فنحصل على ما يلي:

$$0.5 - 0.05 = 0.4500$$

ونكشف في جدول التوزيع الطبيعي عن Z التي تقابل المساحة 0.4500 مع ملاحظة مهمة جداً وهي أن منطقة الرفض تقع في الطرف الأيسر أي السالب للمنحنى، لذلك لابد من وضع إشارة سالبة لقيمة Z التي نحصل عليها.

٥- المقارنة والقرار : وبمقارنة قيمة الإحصائية التي حصلنا عليها في الخطوة رقم (٣) التي تساوي 2.17 - بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم ٤) نجد أن قيمة الإحصائية تقع في منطقة الرفض لأن - 2.17 أصغر من 1.65 - فإن القرار هو :

رفض الفرض العدمي بادعاء المرشح بأن نسبة مؤيديه في المجتمع هي 70 % وقبول الفرض البديل بأن النسبة أقل من 70 % وذلك بمستوى معنوية 5 % (أي أن احتمال الخطأ في هذا القرار لا يتعدى 5 %).

اختبار الفرق بين وسطين حسابيين :

قد يرغب الباحث في إجراء اختبار عما إذا كان متوسط الدخل في إحدى الدول يساوي متوسط الدخل في دولة أخرى، أو إجراء اختبار عما إذا كان متوسط عمر الناخب في إحدى المناطق يساوي متوسط عمر الناخب في منطقة أخرى... وهكذا بمعنى آخر قد يرغب الباحث في إجراء اختبار عما إذا كان متوسط المجتمع الأول يساوي متوسط المجتمع الثاني.. في مثل هذه الحالات يسمى الاختبار اختبار الفرق بين وسطين حسابيين، وتكون خطوات هذا الاختبار في حالة العينات الكبيرة كما يلي :

١- الفرض العدمي : أن متوسط المجتمع الأول يساوي متوسط المجتمع الثاني (أي لا يوجد فرق بين متوسطي المجتمعين).

وبالرموز : $$Ho : \mu_1 = \mu_2$$

٢- الفرض البديل : أن المتوسطين غير متساويين وبالرموز :

$$HI : \mu_1 \neq \mu_2$$

ويمكن للباحث استخدام أكبر من أو أقل من بدلاً من لا يساوي إذا كان لديه معلومات تشير إلى ضرورة ذلك.

٣- الإحصائية : وبافتراض أن المجتمعين طبيعيان وأن العينتين مستقلتان وكبيرتان فإن إحصائية الاختبار في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي :

$$Z_{\bar{X}1-\bar{X}2} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

حيث : يرمز بـ n1 إلى حجم العينة الأولى.

يرمز بـ n2 إلى حجم العينة الثانية.

يرمز بـ $\bar{X}1$ إلى الوسط الحسابي للعينة الأولى.

يرمز بـ $\bar{X}2$ إلى الوسط الحسابي للعينة الثانية.

يرمز بـ σ_1^2 إلى تباين المجتمع الأول.

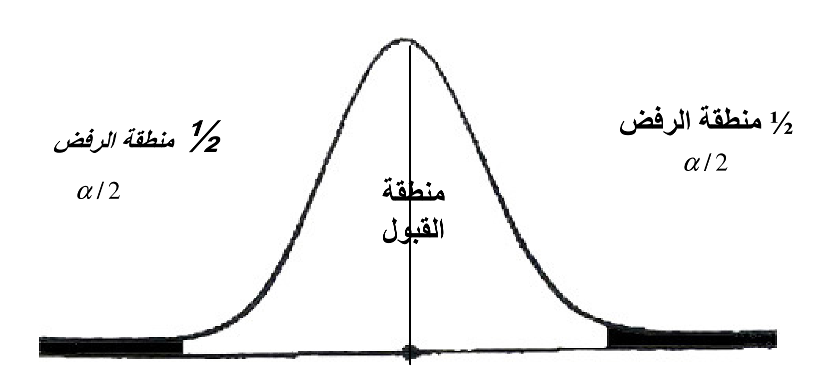
يرمز σ_2^2 إلى تباين المجتمع الثاني.

٤- حدود منطقتي القبول والرفض ويمثلها الشكل التالي مع ملاحظة أن :

أ- التوزيع طبيعي (نحصل على القيم من توزيع Z).

ب- اختبار الطرفين (لأن الفرض البديل لا يساوي).

جـ- مستوى المعنوية يساوي α



٥- المقارنة والقرار نقارن قيمة الإحصائية بحدود منطقتي القبول والرفض، فإذا وقعت في منطقة القبول نقبل الفرض العدمي، وإذا وقعت في منطقة الرفض نرفض الفرض العدمي، ونقبل الفرض البديل.

مثال (٣) :

البيانات التالية تمثل نتائج عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبتين من منطقتين لمقارنة متوسط عمر الناخب فيهما :

حيث $\overline{X}_1 = 35, \overline{X}_2 = 29, n_2 = 80, n_1 = 100$

اختبر الفرض العدمي : أن متوسط عمر الناخب في المنطقة الأولى يساوي متوسط عمر الناخب في المنطقة الثانية بمستوى معنوية 5% مقابل الفرض البديل أنهما غير متساويين إذا علمت أن :

$$\sigma_1^2 = 60, \sigma_2^2 = 32$$

الحل :

١- الفرض العدمي أن المتوسطين متساويان وبالرموز :

$$Ho : \mu_1 = \mu_2$$

٢- الفرض البديل أن المتوسطين غير متساويين وبالرموز :

$$HI : \mu_1 \neq \mu_2$$

٣- الإحصائية : تأخذ الشكل التالي :

$$Z_{\overline{X}1-\overline{X}2} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وبالتعويض عن :

$$n_1 = 100, n_2 = 80, \overline{X}_1 = 35, \overline{X}_2 = 29, \sigma_1^2 = 60, \sigma_2^2 = 32$$

نحصل على :

$$Z_{\overline{X}1-\overline{X}2}=\frac{35-29}{\sqrt{\frac{60}{100}+\frac{32}{80}}}$$

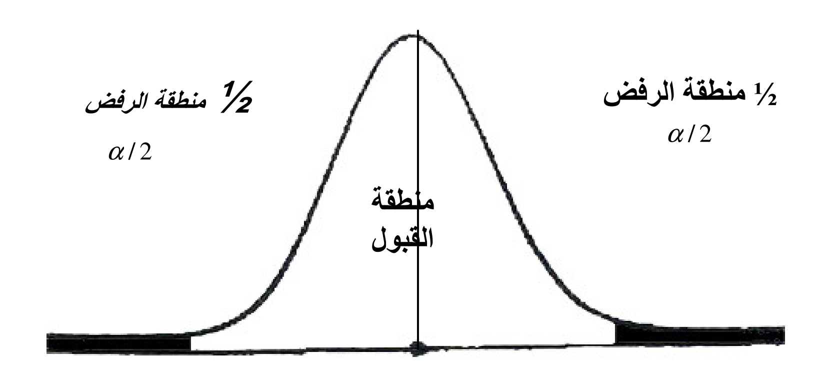
$$=\frac{60}{\sqrt{0.60+0.40}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{1}}=6$$

أي أن قيمة الإحصائية تساوي 6

٤- حدود منطقتي القبول والرفض التي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي Z لأن العينات كبيرة، والاختبار هو اختبار الطرفين (لأن الفرض البديل لا يساوي)

ومستوى المعنوية المطلوب هو % 5.



أي أن منطقة القبول تبدأ من 1.96− إلى 1.96+ ومنطقة الرفض هي القيم التي أصغر من 1.96 − والتي أكبر من 1.96 +.

٥− المقارنة والقرار ولما كانت قيمة الإحصائية (والتي تساوي) 6 تقع في منطقة الرفض فإن القرار هو رفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل بمستوى معنوية 5% أي أننا نرفض الفرض القائل بأن متوسط عمر الناخب في المنطقة الأولى يساوي متوسط عمر الناخب في المنطقة الثانية وذلك بمستوى معنوية 5 %.

اختبار الفرق بين وسطين في حالة العينات الصغيرة :

إذا كانت العينات صغيرة (مجموع العينتين أقل من 30 مفردة أو حتى 31 مفردة) فإن الإحصائية في هذه الحالات بافتراض أن المجتمعين طبيعيان، وأن تباين المجتمع الأول يساوي تباين المجتمع الثاني ولكنه مجهول (بمعنى أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ولكن قيمة هذا التباين غير معروفة) وأن العينتين مستقلتان فإن إحصائية الاختبار تأخذ الشكل التالي والتي لها توزيع t بدرجات حرية تساوي $n_1 + n_2 - 2$

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}}$$

حيث :

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n1 + n_2 - 2}$$

أي يـتم حسـاب S^2 أولاً قبـل التعـويض فـي الإحصـائية وتكـون خطـوات الاختبار هي :

هي :

١- الفرض العدمي (هو نفسه)

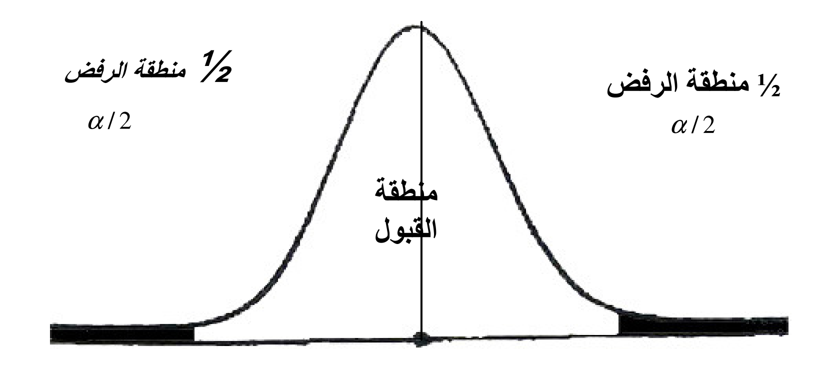
$$HI : \mu_1 = \mu_2$$

٢- الفرض البديل : (هو نفسه) :

$$Ho : \mu_1 \neq \mu_2$$

٣- الإحصائية هي المكتوبة أعلاه (وهي في هذه الحالة t وليست Z)

٤- حـدود منطقتـي القبـول والـرفض ونحصـل عليهـا فـي هـذه الحالـة مـن جدول t عند درجات حرية تساوي $n1 + n_2 - 2$ وعند مستوى معنوية يساوي $\frac{\sigma}{2}$ كما في الشكل التالي:



٥- المقارنة والقرار : كما سبق :

أما إذا فرضنا أن تباين المجتمعين غير متساويين، فإن الإحصائية في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي :

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

مثال (٤) : البيانات التالية تمثل نتائج عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبتين من مدينتين عن أعمار الناخبين بهما (بافتراض أن تباينهما هو نفسه) :

$$n1 = 10, n_2 = 10, \overline{X}1 = 28 \overline{X}2 = 26, S_1^2 = 50, S_2^2 = 30$$

اختبر الفرض العدمي : $Ho: \mu_1 = \mu_2$ مقابل الفرض البديل $HI: \mu_1 \neq \mu_2$

وذلك بمستوى معنوية % 5 بافتراض أن الأعمار في المدينتين لهما توزيع طبيعي.

الحل :

١- الفرض العدمي : $Ho: \mu_1 = \mu_2$

أي متوسط أعمار الناخبين في المدينتين متساوٍ

٢- الفرض البديل : $HI: \mu_1 \neq \mu_2$

أي متوسط أعمار الناخبين في المدينتين غير متساوٍ

٣- الإحصائية لاحظ (أن العينات صغيرة، وأن تباين المجتمعين هو نفسه، وأن المجتمعين طبيعيان). فإن الإحصائية المناسبة في هذه الحالة هي t :

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}}$$

حيث

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n1 + n_2 - 2}$$

نحسب أولاً S^2 كما يلي :

$$S^2 = \frac{(10-1)\times 50 + (10-1)\times 30}{10+10-2}$$

$$= \frac{9\times 50 + 9\times 30}{18}$$

$$= \frac{450+270}{18}$$

$$= \frac{720}{18}$$

$$S^2 = 40$$

وبالتعويض في الإحصائية عن :

$$\overline{X}_1 = 28, \overline{X}_2 = 26, S^2 = 40, n1 = 10, n_2 = 10$$

نحصل على :

$$t = \frac{28-26}{\sqrt{\frac{40}{10} + \frac{40}{10}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2.828} = 0.7$$

أي أن قيمة الإحصائية تساوي 0.7

٤- حدود منطقتي القبول والرفض :

ونحصل عليها في هذه الحالة من جدول t عند درجات حرية تساوي $n_1 + n_2 - 2$

أي تساوي 2 − 10 + 10 والتي تساوي 18 وذلك عند مستوى معنوية يساوي

$\alpha = 0.05$ أي أن نصف مستوى المعنوية $\frac{0.05}{2} = 0.025$ أي أن

$t_{0.025,18} = 2.101$

أي أن منطقة القبول تبدأ من 2.101− وحتى 2.101 +

٥- المقارنة والقرار :

وحيث أن قيمة الإحصائية تساوي 0.7 فإنها تقع في منطقة القبول وبالتالي فإن القرار هو قبول الفرض العدمي بأن متوسط أعمار الناخبين في المدينة الأولى يساوي متوسط أعمار الناخبين في المدينة الثانية وذلك بمستوى معنوي 5.% (حل المثال السابق بافتراض أن تباين المجتمعين غير متساويين).

اختبار الفرق بين نسبتين :

كذلك قد يرغب الباحث في اختبار ما إذا كانت نسبة المؤيدين لمرشح ما في الانتخابات التشريعية تساوي نسبة المؤيدين لمرشح آخر في الانتخابات نفسها، في مثل هذه الحالات فإن المطلوب هو اختبار ما إذا كانت النسبة في المجتمع الأول تساوي النسبة في المجتمع الثاني، ويسمى الاختبار : اختبار الفرق بين نسبتين وتكون خطوات هذا الاختبار ما يلي :

١- الفرض العدمي : هو أن النسبة في المجتمعين متساوية وبالرموز :

$$Ho: P_1 = P_2$$

٢- الفرض البديل : هو أن النسبتين في المجتمعين غير متساوية وبالرموز

$$H1: p_1 \neq p_2$$

(ويمكن اختيار شكل آخر للفرض البديل مثل: أكبر من أو أقل إذا دعت الحاجة لذلك).

٣- الإحصــائية : بــافتراض أن العينتــين كبيرتــان بدرجــة كافيــة تكــون الإحصائية كما يلي

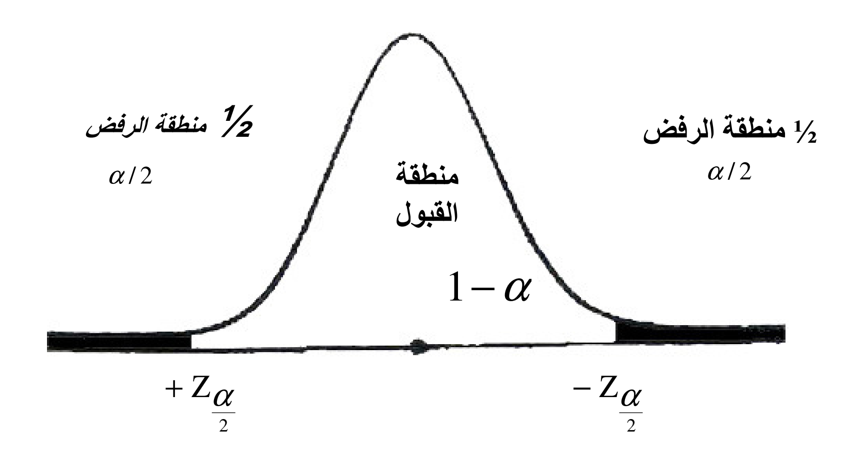
$$Z_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n2}}}$$

حيث :

$$\hat{P} = \frac{n_1\hat{P}_1 + n_2\hat{P}_2}{n_1 + n_2}$$

أي يتم أولاً حساب $\hat{P}$ (والتي تمثل متوسط مرجح من نسبتي العينتين) قبل التعويض في الإحصائية والتي لها توزيع طبيعي معياري.

٤- حــدود منطقتــي القبــول والــرفض ونحصــل عليهــا مــن جــدول التوزيــع الطبيعي، والاختبار هنا هو اختبار الطرفين (لأن الفرض البديل لا يساوي) وتحدد المنطقتين بناءً على مستوى المعنوية المطلوب، وذلك كما في الشكل التالي :



٥- المقارنة والقرار : كما سبق

مثال (٥) : لاختبار ما إذا كانت نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين في المدينة (أ) يساوي نسبة المؤيدين لهذا البرنامج في المدينة (ب) تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين من المدينتين حيث : حجم العينة الأولى يساوي حجم العينة الثانية يساوي 100 وكانت نسبة المؤيدين للبرنامج في عينة المدينة (أ) هي : $\hat{P} = 0.70$ ونسبة المؤيدين للبرنامج في عينة المدينة ب هي $\hat{P}_2 = 0.50$.

اختبر الفرض العدمي أن النسبة في المدينتين متساوية مقابل الفرض البديل أنها غير متساوية وذلك بمستوى معنوية % 1.

الحل :

١- الفرض العدمي :

النسبة في المدينة أ تساوي النسبة في المدينة ب وبالرموز :

$$Ho: P_1 = P_2$$

٢- الفرض البديل : النسبة في المدينتين غير متساوية وبالرموز

$$H1: P_1 \neq P_2$$

٣- الإحصائية :

$$Z_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n1} + \frac{\hat{P}(-\hat{P})}{n2}}}$$

حيث
$$\hat{P} = \frac{n_1\hat{P}_1 + n_2\hat{P}_2}{n_1 + n_2}$$

وبالتعويض عن : $n_1 = 100, n_2 = 100, \hat{P}_1 = 0.70, \hat{P}_2 = 0.50$

نحصل على :

$$\hat{p} = \frac{100\times 0.70 + 100\times 0.50}{100+100}$$

$$= \frac{70+50}{200}$$

$$= \frac{120}{200}$$

$$\hat{p} = 0.60$$

وبالتعويض في الإحصائية نحصل على :

$$z = \frac{0.70 - 0.50}{\sqrt{\frac{0.60\times 0.40}{100} + \frac{0.60\times 0.40}{100}}}$$

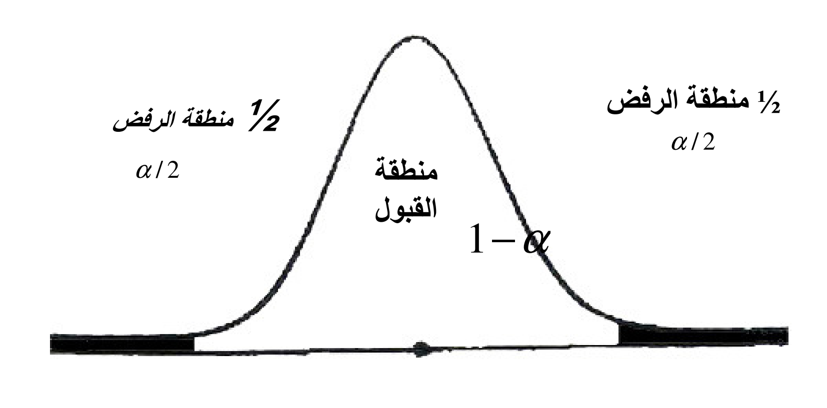
$$= \frac{0.20}{0.069}$$

$$= 2.899$$

أي أن قيمة الإحصائية تساوي 2.899

٤- حدود منطقتي القبول والرفض

نحصل عليها من التوزيع الطبيعي، واختبار الطرفين بمستوى معنوية % 1 كما في الشكل التالي :



2.58   + 2.58

أي أن منطقة القبول تبدأ من 2.58- وحتى 2.58 +

٥- المقارنة والقرار :

وحيث أن قيمة الإحصائية تساوي 2.899 فهي تقع في منطقة الرفض وبالتالي فإن القرار هو :

رفض الفرض العدمي وقبول الفرض البديل أي رفض الفرض القائل بأن نسبة المؤيدين للبرنامج الاقتصادي في المدينة (أ) تساوي نسبة المؤيدين له في المدينة (ب) وذلك بمستوى معنوية 1% (بمعنى أن احتمال الخطأ في هذا القرار لا تتعدى 1%). وقبول الفرض البديل بأن النسبتين غير متساويتين.

الفصل السابع
الثبات والصدق

- أولاً : معنى الثبات .
- ثانياً : طرق حساب معامل الثبات .
  - طريقة إعادة الاختبار .
  - طريقة التجزئة النصفية .
- ثالثاً : معنى الصدق .
- رابعاً : قياس الصدق .
  - طريقة المقارنة الطرفية .



معنى الثبات :

إذا أجرى اختبار ما على مجموعة من الأفراد ورصدت درجات كل فرد فى هذا الاختبار ثم أعيد إجراء نفس هذا الاختبار على نفس هذه المجموعة ورصدت أيضا درجات كل فرد ودلت النتائج على أن الدرجات التى حصل عليها الطلاب فى المرة الأولى لتطبيق الاختبار هى نفس الدرجات التى حصل عليها هؤلاء الطلاب فى المرة الثانية ، نستنتج من ذلك أن نتائج الاختبار ثابتة تماماً لأن نتائج القياس لم تتغير فى المرة الثانية بل ظلت كما كانت قائمة فى المرة الأولى .

حساب الثبات :

حساب معامل الارتباط هو خير طريقة لمقارنة هذه الدرجات التى حصل علها الطلاب فى الاختبارين .

ويحسب معمل الثبات من العلاقة التالية :

$$\text{معامل الثبات} = \frac{\text{٢ر}}{\text{١ + ر}}$$

<u>حيث :</u>

ر : هو معامل ارتباط بيرسون ويحسب من العلاقة :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ (س×ص) – مجـ س × مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}] \times [\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

طرق حساب معامل الثبات :

١- طريقة إعادة الاختبار :

تقوم فكرة هذه الطريقة على إجراء الاختبار على مجموعة من الأفراد ثم إعادة إجراء نفس الاختبار على نفس مجموعة الأفراد بعد مضى فترة زمنية وهكذا يحصل كل فرد على درجة فى الإجراء الأول للاختبار وعلى درجة أخرى فى الإجراء الثانى للاختبار ، وعندما نرصد هذه الدرجات ونحسب معامل ارتباط درجات المرة الأولى بدرجات المرة الثانية فأننا نحصل بذلك على معامل ثبات الاختبار .

مثال :

الجدول التالى يوضح درجات مجموعة من الطلاب فى اختبار تم إجراؤه على نفس الطلاب مرتين والمطلوب حساب قيمة معمل ثبات الاختبار ؟

درجة الاختبار الأول	٣	٥	٩	٨	٢
درجة الاختبار الثاني	٤	٦	٧	٤	٣

الحل :

نفترض أن درجات الاختبار الأول هى "س" ودرجات الاختبار الثانى هى "ص" ثم نكون الجدول التالى :

س	ص	س×ص	س^{2}	ص^{2}
٣	٤	١٢	٩	١٦
٥	٦	٣٠	٢٥	٣٦
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
٨	٤	٣٢	٦٤	١٦
٢	٣	٦	٤	٩
٢٧	٢٤	١٤٣	١٨٣	١٢٦

<u>حساب معامل الارتباط لبيرسون</u> :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ (س×ص)} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}] \times [\text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ص})^{2}]}}$$

نعوض فى المعادلة السابقة :

$$\text{ر} = \frac{\text{٥} \times \text{١٤٣} - \text{٢٧} \times \text{٢٤}}{\sqrt{[\text{٥} \times \text{١٨٣} - (\text{٢٧})^{2}] \times [\text{٥} \times \text{١٢٦} - (\text{٢٤})^{2}]}}$$

ر= ٠,٦٦٨

$$\text{معامل الثبات} = \frac{٢ \times ٠,٦٦٨}{١ + ٠,٦٦٨}$$

معامل الثبات = ٠,٨

٢- <u>**طريقة التجزئة النصفية**</u> :

تعتمد هذه الطريقة على تجزئـة الاختبـار إلـى جزأين فقط بحيث يتكون الجزء الأول من الـدرجات الفرديـة للاختبـار ويتكـون الجـزء الثانى من الدرجات الزوجية للاختبار .

<u>**مثال :**</u>

الأفراد	الأسئلة							
	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
١	١	١	١	١	١	٠	٠	٠
٢	١	١	١	٠	١	١	٠	٠
٣	١	١	٠	١	١	٠	٠	٠
٤	١	١	١	٠	١	١	١	١
٥	١	١	١	٠	٠	١	٠	٠
٦	١	١	١	١	٠	٠	١	١
٧	١	١	١	٠	١	١	٠	٠
٨	١	١	١	١	١	١	١	٠
٩	١	١	١	١	٠	٠	٠	٠
١٠	١	١	١	١	١	١	١	١

الجدول السابق يوضح درجات عشرة طلاب فى اختبار تم تقسيمه إلى ثماني أسئلة والمطلوب حساب قيمة معامل الثبات لدرجات الأسئلة الفردية والزوجية باستخدام طريقة التجزئة النصفية ؟

الحل :

نقوم بتجميع درجات الأسئلة الفردية على حدة ونسميها "س" ودرجات الأسئلة الزوجية على حده ونسميها "ص" لكل طالب منفرداً ونضعها فى الجدول التالى :

س الدرجات الفردية	ص الدرجات الزوجية	س×ص	س^{٢}	ص^{٢}
٣	٢	٦	٩	٤
٣	٣	٩	٩	٩
٢	٢	٤	٤	٤
٤	٣	١٢	١٦	٩
٢	٢	٤	٤	٤
٣	٣	٩	٩	٩
٣	٢	٦	٩	٤
٤	٣	١٢	١٦	٩
٢	٢	٤	٤	٤
٤	٤	١٦	١٦	١٦
٣٠	٢٦	٨٢	٩٦	٧٢

حساب معامل الارتباط لبيرسون :

$$ر = \frac{ن\ مجـ (س×ص) - مجـ\ س × مجـ\ ص}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}] × [ن\ مجـ\ ص^{٢} - (مجـ\ ص)^{٢}]}}$$

نعوض فى المعادلة السابقة :

$$ر = \frac{١٠ × ٨٢ - ٣٠ × ٢٦}{\sqrt{[١٠ × ٩٦ - (٣٠)^{٢}] × [١٠ × ٧٢ - (٢٦)^{٢}]}}$$

ر= ٠,٧٨

$$معامل\ الثبات = \frac{٢ × ٠,٧٨}{١ + ٠,٧٨}$$

معامل الثبات = ٠,٨٨

معنى الصدق :

الاختبار الصادق يقيس ما وضع لقياسه فاختبار الذكاء الذى يقيس الذكاء فعلاً اختبار صادق مثله فى ذلك كمثل المتر فى قياسه للأطوال والكيلو فى قياسه للأوزان والساعة فى قياسها للزمن وتختلف الاختبارات فى مستويات صدقها تبعاً لاقترابها أو ابتعادها من تقدير تلك الصفة التى تهدف إلى قياسها فاختبار الذكاء الذى يصل فى قياسه لتلك القدرة إلى مستوى ٠,٨ أصدق فى هذا القياس من أى اختبار آخر للذكاء لا يصل إلى هذا المستوى أى أنه أصدق مثلاً من الاختبار الذى يصل فى قياسه للذكاء إلى مستوى ٠,٥ .

ويحسب مستوى صدق الاختبار بمقارنة نتائجه بنتائج مقياس آخر دقيق لتلك الصفة ويسمى هذا المقياس بالميزان .

قياس الصدق :

طريقة المقارنة الطرفية

تقوم هذه الطريقة على مقارنة متوسط درجات الأقوياء فى الميزان بمتوسط درجات الضعاف فى نفس ذلك الميزان بالنسبة لتوزيع درجات الاختبار ولذا سميت بالمقارنة الطرفية لاعتمادها على الطرف القوى الذى نسميه بأصحاب الميزان القوى والطرف الضعيف الذى نسميه أصحاب الميزان الضعيف .

ولحساب الدلالة الإحصائية للفرق بين أصحاب المستوى القوى والضعيف نستعين بالنسبة الحرجة :

$$\text{النسبة الحرجة} = \frac{م_2 - م_1}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}}$$

<u>حيث :</u>

$م_1$ = متوسط درجات أصحاب الميزان الضعيف

$م_2$ = متوسط درجات أصحاب الميزان القوى

$ع_1^2$ = تباين درجات أصحاب المستوى الضعيف

$ع_2^2$ = تباين درجات أصحاب المستوى القوى

$ن_1$ = مجموع تكرارات أصحاب الميزان الضعيف = مجـ $ك_1$

$ن_2$ = مجموع تكرارات أصحاب الميزان القوى = مجـ $ك_2$

ويحسب المتوسط فى البيانات المبوبة من العلاقة :

$$م = \frac{\text{مجـ}\ (س \times ك)}{\text{مجـ}\ ك}$$

حيث "س" هى مركز الفئة وتحسب من العلاقة :

- **س = (بداية الفئة الأولى+ نهاية الفئة)/٢**
- **ك : هو التكرار**

ويحسب التباين من العلاقة :

$$\text{ع}^{2} = \text{ل}^{2} \times \left[\frac{\text{مجـ}\ (\text{ح}^{2} \times \text{ك})}{\text{مجـ ك}} - \left(\frac{\text{مجـ}\ (\text{ح} \times \text{ك})}{\text{مجـ ك}} \right)^{2} \right]$$

حيث :

ح = الانحراف ويحسب عن طريق وضع صفر أمام الفئة ذات أكبر تكرار ثم من أسفل (١ ، ٢ ، ٣ ، ......)
ومن أعلى (-١ ، -٢ ، -٣ ، ....) .
ل = طول الفئة = الفرق بين بدايتي أي فئتين متتاليتين .

تحديد مدى دلالة النسبة الحرجة وصدق الاختبار من عدمه

- **إذا كانت النسبة الحرجة < ١,٩٦ يكون الاختبار غير صادق عند مستوى دلالة ٠,٠٥ .**
- **١,٩٦ < النسبة الحرجة < ٢,٥٨ يكون الاختبار صادق عن مستوى دلالة ١,٩٦ .**
- **إذا كانت النسبة الحرجة > ٢,٥٨ يكون الاختبار صادق عند مستوى دلالة ٠,٠١ .**
- **بالطبع المقارنة بالقيمتين (١,٩٦ ، ٢,٥٨) قيم ثابتة لا تتغير.**

مثال :

الجدول التالي يوضح العلاقة بين فئات وتكرارات أصحاب مستوى الميزان القوى والضعيف لعدد من الطلاب فى اختبار للذكاء ، والمطلوب حساب قيمة معامل الصدق (النسبة الحرجة) وتحديد صدق الاختبار من عدمه عند مستوى دلالة ٠,٠٥ ؟

الفئات	١٤-١٦	١٧-١٩	٢٠-٢٢	٢٣-٢٥	٢٦-٢٨	٢٩-٣١
تكرار الميزان الضعيف	٤	٣	٨	٠	٠	٠
تكرار الميزان القوى	٠	٠	٠	٥	٧	٩

الحل :

نكون الجدول التالى :

ف	ك$_{1}$	ك$_{2}$	س	ك$_{1}$×س	ك$_{2}$×س	ح	ح×ك$_{1}$	ح^{2}×ك$_{1}$	ح×ك$_{2}$	ح^{2}×ك$_{2}$
١٤-١٦	٤	٠	١٥	٦٠	٠	-٢	-٨	١٦	٠	٠
١٧-١٩	٣	٠	١٨	٥٤٤	٠	-١	-٣	٣	٠	٠
٢٠-٢٢	٨	٠	٢١	١٦٨	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٢٣-٢٥	٠	٥	٢٤	٠	١٢٠	١	٠	٠	٥	٥
٢٦-٢٨	٠	٧	٢٧	٠	١٨٩	٢	٠	٠	١٤	٢٨
٢٩-٣١	٠	٩	٣٠	٠	٢٧٠	٣	٠	٠	٢٧	٨١
مجموع	١٥	٢١	-	٢٨٢	٥٧٩	-	-١١	١٩	٤٦	١٠٩

<u>حساب المتوسط لأصحاب الميزان الضعيف :</u>

$$م_{1} = \frac{مجـ (س \times ك_{1})}{مجـ ك_{1}}$$

$$م_{١} = \frac{٢٨٢}{١٥} = ١٨,٨$$

حساب المتوسط لأصحاب الميزان القوى :

$$م_{٢} = \frac{مجـ (س \times ك_{٢})}{مجـ ك_{٢}}$$

$$م_{٢} = \frac{٥٧٩}{٢١} = ٢٧,٥$$

حساب طول الفئة :

ل = الفرقة بين بدايتي أي فئتين متتاليتين

ل = ١٧ – ١٤ = ٣

حساب التباين لأصحاب الميزان الضعيف :

$$ع_{١}^{٢} = ل^{٢} \times \left\{ \frac{مجـ (ح^{٢} \times ك_{١})}{مجـ ك_{١}} - \left[\frac{مجـ (ح \times ك_{١})}{مجـ ك_{١}} \right]^{٢} \right\}$$

$$ع_{١}^{٢} = ٣,٦٨$$

حساب التباين لأصحاب الميزان القوى :

$$ع_٢^٢ = ل^٢ \times \left\{ \frac{مجـ(ح^٢ \times ك_٢)}{مجـ ك_٢} - \left[\frac{مجـ(ح \times ك_٢)}{مجـ ك_٢} \right]^٢ \right\}$$

$ع_٢^٢ = ٣٣,٢٩$

حساب قيمة $ن_١$ ، $ن_٢$:

$ن_١ = مجـ ك_١ = ١٥$

$ن_٢ = مجـ ك_٢ = ٢١$

<u>حساب قيمة النسبة الحرجة :</u>

$$النسبة الحرجة = \frac{م_٢ - م_١}{\sqrt{\frac{ع_١^٢}{ن_١} + \frac{ع_٢^٢}{ن_٢}}}$$

$$النسبة الحرجة = \frac{٢٧,٥ - ١٨,٨}{\sqrt{\frac{٣,٦٨}{١٥} + \frac{٣٣,٢٩}{٢١}}}$$

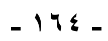
النسبة الحرجة = ٦,٤ .

<u>تحديد صدق الاختبار :</u>

قيمة النسبة الحرجة (٦,٤) > ١,٩٦ عند مستوى دلالـة ٠,٠٥

لذا فان الاختبار صادق .

الجداول الإحصائية



جدول كا^{2}

درجة الحرية	مستوى الدلالة أو الثقة		
	0.05	0.01	0.001
1	3.84	6.64	10.83
2	5.99	9.21	13.82
3	7.82	11.35	16.27
4	9.49	13.28	18.47
5	11.07	15.09	20.52
6	12.59	16.81	22.46
7	14.07	18.48	24.32
8	15.51	20.09	26.13
9	16.92	21.67	27.88
10	18.31	23.21	29.59
11	19.68	24.73	31.26
12	21.03	26.22	32.91
13	22.36	27.69	34.53
14	23.69	29.14	36.12
15	25.00	30.58	37.70
16	26.30	32.00	39.25
17	27.59	33.41	40.79
18	28.87	34.81	42.31
19	30.14	36.19	43.82
20	31.41	37.57	45.32
21	32.67	38.93	46.80

22	33.92	40.29	48.27
23	35.17	41.64	49.73
24	36.42	42.98	51.18
25	37.65	44.31	52.62
26	38.89	45.64	54.05
27	40.11	46.96	55.48
28	41.34	48.28	56.89
29	42.56	49.59	58.30
30	43.77	50.89	59.70
31	44.99	52.19	61.10
32	46.19	53.49	62.49
33	47.40	54.78	63.87
34	48.60	56.06	65.25
35	49.80	57.34	66.62
36	51.00	58.62	67.99
37	52.19	59.89	69.35
38	53.38	61.16	70.71
39	54.57	62.43	72.06
40	55.76	63.69	73.41
41	56.94	64.95	74.75
42	58.12	66.21	76.09
43	59.30	67.46	77.42
44	60.48	68.71	78.75
45	61.66	69.96	80.08
46	62.83	71.20	81.40

47	64.00	72.44	82.72
48	65.17	73.68	84.03
49	66.34	74.92	85.35
50	67.51	76.15	86.66
51	68.67	77.39	87.97
52	69.83	78.62	89.27
53	70.99	79.84	90.57
54	72.15	81.07	91.88
55	73.31	82.29	93.17
56	74.47	83.52	94.47
57	75.62	84.73	95.75
58	76.78	85.95	97.03
59	77.93	87.17	98.34
60	79.08	88.38	99.62
61	80.23	89.59	100.88
62	81.38	90.80	102.15
63	82.53	92.01	103.46
64	83.68	93.22	104.72
65	84.82	94.42	105.97
66	85.97	95.63	107.26
67	87.11	96.83	108.54
68	88.25	98.03	109.79
69	89.39	99.23	111.06
70	90.53	100.42	112.31
71	91.67	101.62	113.56

72	92.81	102.82	114.84
73	93.95	104.01	116.08
74	95.08	105.20	117.35
75	96.22	106.39	118.60
76	97.35	107.58	119.85
77	98.49	108.77	121.11
78	99.62	109.96	122.36
79	100.75	111.15	123.60
80	101.88	112.33	124.84
81	103.01	113.51	126.09
82	104.14	114.70	127.33
83	105.27	115.88	128.57
84	106.40	117.06	129.80
85	107.52	118.24	131.04
86	108.65	119.41	132.28
87	109.77	120.59	133.51
88	110.90	121.77	134.74
89	112.02	122.94	135.96
90	113.15	124.12	137.19
91	114.27	125.29	138.45
92	115.39	126.46	139.66
93	116.51	127.63	140.90
94	117.63	128.80	142.12
95	118.75	129.97	143.32
96	119.87	131.14	144.55

97	120.99	132.31	145.78
98	122.11	133.47	146.99
99	123.23	134.64	148.21
100	124.34	135.81	149

جدول T

درجة الحرية	مستوى الدلالة							
طرف واحد	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001	0.00005
طرفين	0.2	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0005	0.0001
2	1.89	2.92	4.30	9.92	14.09	31.60	44.70	100.14
3	1.64	2.35	3.18	5.84	7.45	12.92	16.33	28.01
4	1.53	2.13	2.78	4.60	5.60	8.61	10.31	15.53
5	1.48	2.02	2.57	4.03	4.77	6.87	7.98	11.18
6	1.44	1.94	2.45	3.71	4.32	5.96	6.79	9.08
7	1.41	1.89	2.36	3.50	4.03	5.41	6.08	7.89
8	1.40	1.86	2.31	3.36	3.83	5.04	5.62	7.12
9	1.38	1.83	2.26	3.25	3.69	4.78	5.29	6.59
10	1.37	1.81	2.23	3.17	3.58	4.59	5.05	6.21
11	1.36	1.80	2.20	3.11	3.50	4.44	4.86	5.92
12	1.36	1.78	2.18	3.05	3.43	4.32	4.72	5.70
13	1.35	1.77	2.16	3.01	3.37	4.22	4.60	5.51
14	1.35	1.76	2.14	2.98	3.33	4.14	4.50	5.36
15	1.34	1.75	2.13	2.95	3.29	4.07	4.42	5.24
16	1.34	1.75	2.12	2.92	3.25	4.01	4.35	5.13
17	1.33	1.74	2.11	2.90	3.22	3.97	4.29	5.04
18	1.33	1.73	2.10	2.88	3.20	3.92	4.23	4.97
19	1.33	1.73	2.09	2.86	3.17	3.88	4.19	4.90
20	1.33	1.72	2.09	2.85	3.15	3.85	4.15	4.84
21	1.32	1.72	2.08	2.83	3.14	3.82	4.11	4.78
22	1.32	1.72	2.07	2.82	3.12	3.79	4.08	4.74
23	1.32	1.71	2.07	2.81	3.10	3.77	4.05	4.69

24	1.32	1.71	2.06	2.80	3.09	3.75	4.02	4.65
25	1.32	1.71	2.06	2.79	3.08	3.73	4.00	4.62
26	1.31	1.71	2.06	2.78	3.07	3.71	3.97	4.59
27	1.31	1.70	2.05	2.77	3.06	3.69	3.95	4.56
28	1.31	1.70	2.05	2.76	3.05	3.67	3.93	4.53
29	1.31	1.70	2.05	2.76	3.04	3.66	3.92	4.51
30	1.31	1.70	2.04	2.75	3.03	3.65	3.90	4.48
35	1.31	1.69	2.03	2.72	3.00	3.59	3.84	4.39
40	1.30	1.68	2.02	2.70	2.97	3.55	3.79	4.32
45	1.30	1.68	2.01	2.69	2.95	3.52	3.75	4.27
50	1.30	1.68	2.01	2.68	2.94	3.50	3.72	4.23
55	1.30	1.67	2.00	2.67	2.92	3.48	3.70	4.20
60	1.30	1.67	2.00	2.66	2.91	3.46	3.68	4.17
65	1.29	1.67	2.00	2.65	2.91	3.45	3.66	4.15
70	1.29	1.67	1.99	2.65	2.90	3.43	3.65	4.13
75	1.29	1.67	1.99	2.64	2.89	3.42	3.64	4.11
80	1.29	1.66	1.99	2.64	2.89	3.42	3.63	4.10
85	1.29	1.66	1.99	2.63	2.88	3.41	3.62	4.08
90	1.29	1.66	1.99	2.63	2.88	3.40	3.61	4.07
95	1.29	1.66	1.99	2.63	2.87	3.40	3.60	4.06
100	1.29	1.66	1.98	2.63	2.87	3.39	3.60	4.05
200	1.29	1.65	1.97	2.60	2.84	3.34	3.54	3.97
500	1.28	1.65	1.96	2.59	2.82	3.31	3.50	3.92
1000	1.28	1.65	1.96	2.58	2.81	3.30	3.49	3.91
∞	1.28	1.64	1.96	2.58	2.81	3.29	3.48	3.89

أهم المراجع

١- اعتماد علام ، يسرى رسلان ، أساسيات الإحصاء الاجتماعي ، دار الثقافة للنشر والتوزيع .

٢- أنور عطية العدل ، مبادئ الإحصاء الاجتماعي ، دار المعرفة الجامعية ، ١٩٨٧ .

٣- حسن محمد حسن ، أساسيات الإحصاء وتطبيقاته ، دار المعرفة الجامعية ، ١٩٩٢ .

٤- حسن محمد حسن ، مبادئ الإحصاء الاجتماعي ، دار المعرفة الجامعية ، ٢٠٠٠ .

٥- خليفة عبد السميع خليفة ، الإحصاء التربوي ، مكتبة الأنجلو المصرية .

٦- عبد الله عبد الحليم وآخرون ، الإحصاء مفاهيم أساسية ، ٢٠٠٣ .

٧- غريب محمد سيد أحمد ، الإحصاء والقياس فى البحث الاجتماعي ، دار المعرفة الجامعية ، ١٩٨٩ .

٨- غريب محمد سيد أحمد ، ناجى بدر إبراهيم ، الإحصاء والقياس فى البحث الاجتماعي ، دار المعرفة الجامعية ، ١٩٩٧ .

٩- فاروق عبد العظيم وآخرون ، مبادئ الإحصاء ، دار المعرفة الجامعية .

١٠- فتحى عبد العزيز أبو راضى ، مبادئ الإحصاء الاجتماعي ، دار المعرفة الجامعية .

١١- محمد بهجت كشك ، مبادئ الإحصاء الاجتماعي ، دار المعرفة الجامعية ، ١٩٩٦ .

١٢- مصطفى زايد ، الإحصاء ووصف البيانات ، ١٩٨٩ .

13- http://www.mohp.gov.eg/Sec/Heducation/tadrib/5.doc

14- http://www.arab-api.org/course13/c13_4.htm

15-http://dentarab.com/site/index.php?page=show_det&id=178

الفهرس